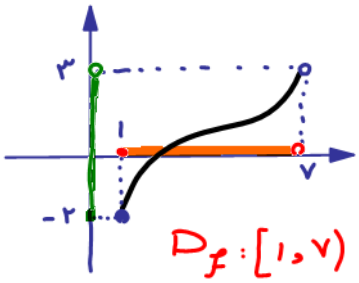
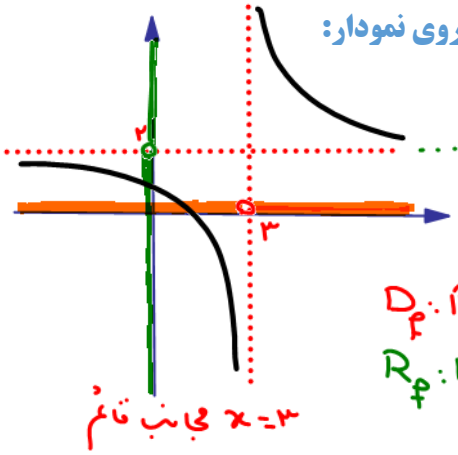
تعیین دامنه و برد یک تابع از روی نمودار:



$D_f : [1,7)$

$R_f : [-2,3)$



مجانب افقی $y=2$ ...

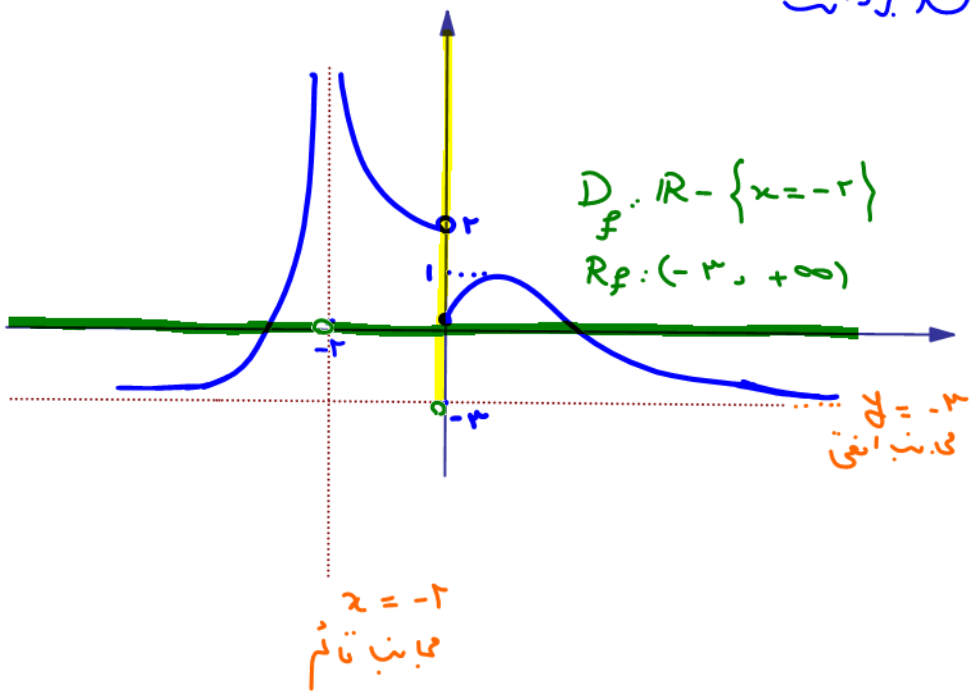
مجانب قائم $x=-3$

$D_f : \mathbb{R} - \{x=-3\}$

$R_f : \mathbb{R} - \{y=2\}$

کافی است: با یک پرس ۲ فکه شکل را روی محور طول‌ها (xها) پرس کنیم محدوده تغییرات x پیدا می‌شود یعنی همه جا روی محور xها که شده عضو دامنه است.

برای برد شکل را با یک پرس دو فکه روی محور yها (عرض‌ها) پرس می‌کنیم هرجا که شد برداشت.



$D_f : \mathbb{R} - \{x=-2\}$

$R_f : (-3, +\infty)$

مجانب افقی $y=-3$

مجانب قائم $x=-2$

روش‌های حل تست:

۱- روش کلاسیک

۲- حذف حالات نامطلوب (ردّ گزینه)

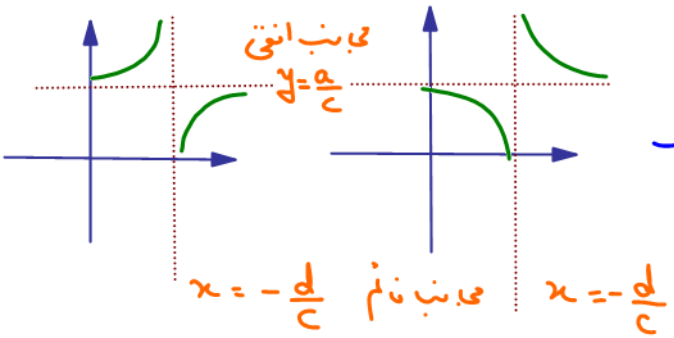
۳- کنترل گزینه‌ها و عددگذاری

۴- روش ترسیم

معرفی و رسم تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$

تابع هموگرافیک

مراحل رسم هموگرافیک:



ثانیه ① : ریشه مخرج $x=$ مجانب قائم است

ثانیه ② $y=\frac{\text{ضریب } x \text{ صورت}}{\text{ضریب } x \text{ مخرج}}$ مجانب افقی است

ثانیه ③ $A(0,y)$ $B(x,0)$

یک بار به x صفر داده y را می‌یابیم

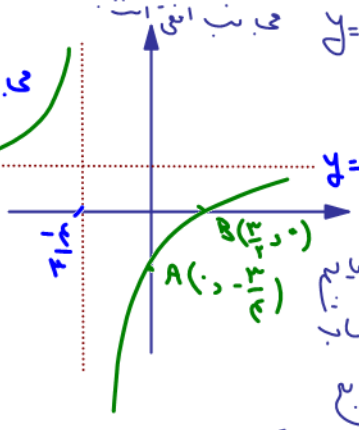
یک بار به y صفر داده x را حساب می‌کنیم تا محل برخورد تابع با محورهای مختصات به دست آید.

$y=\frac{x-3}{x+2}$

$\frac{x-3}{x+2}=0 \rightarrow x=-\frac{3}{2}$ مجانب قائم

مجانب افقی $y=\frac{2}{2}$

$A\left(x=0,-\frac{3}{2}\right)$

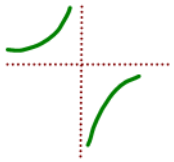


ثانیه ④ رسم شاخه‌ها

دقت: در عبارت $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ابتدا $ad-bc$ را بسازید.

اگر $ad-bc>0$ شاخه‌ها صعودی

اگر $ad-bc<0$ شاخه‌ها نزولی



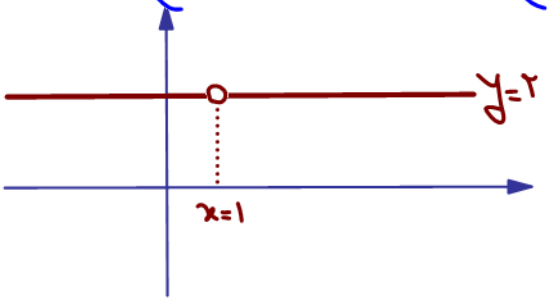
اگر $ad-bc=0$ یا $ad=bc$ یا $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ → شکل تبدیل به تابع ثابت می‌شود که در ریشه مخرج توخالی است.

$y=\frac{2x-2}{x-1}=\frac{2(x-1)}{x-1}=2$

$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

$x\neq 1$

$D_f:\mathbb{R}-\{x=1\}$



اگر $c=0 \rightarrow y=\frac{ax+b}{d}=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$ خط

تمرین: مجموعه جواب نامعادلهٔ $-1 < \frac{3x+1}{x-3} < 3$ به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $x < \frac{1}{2}$ ۲) $x < 3$ ۳) $-\frac{1}{2} < x < 3$ ۴) $\frac{1}{2} < x < 3$

راه کلاسیک: حل نامعادلی توأمان

$$-1 < \frac{3x+1}{x-3} < 3$$

و

$$\frac{3x+1}{x-3} < 3 \rightsquigarrow \frac{3x+1}{x-3} - 3 < 0 \rightsquigarrow \frac{3x+1-3x+9}{x-3} < 0 \rightsquigarrow \frac{10}{x-3} < 0 \rightsquigarrow x-3<0 \rightsquigarrow x<3 \quad \text{(الف)}$$

$$-1 < \frac{3x+1}{x-3} \rightsquigarrow 0 < \frac{3x+1}{x-3} + 1 \rightsquigarrow 0 < \frac{3x+1+x-3}{x-3} = \frac{4x-2}{x-3} \rightsquigarrow 4x-2>0 \rightsquigarrow 4x>2 \rightsquigarrow x>\frac{1}{2} \quad \text{(ب)}$$

از مرحله‌ی بالا می‌فهمیم باید منفی باشه که مثبت مخرجش منفی‌است صورت هم باید منفی باشه $x-3<0$

	$\frac{1}{2}$		3
$4x-2$	−	+	+
$x-3$	−	−	+
$\frac{4x-2}{x-3}$	+	−	+

از (الف) و (ب): $\frac{1}{2} < x < 3$ گزینه ۴

راه بعدی گزینه‌ها را در گزینه: می‌بینم $x=1$ که در گزینه ۲، ۳ و ۴ هست نامعادلی را برقرار می‌کند:

پس $x=1$ عدد غلطیه و فقط گزینه یک در بازه $-1 < \frac{3x+1}{x-3} \overset{x=1}{=} \frac{4}{-2} = -2 < 3$

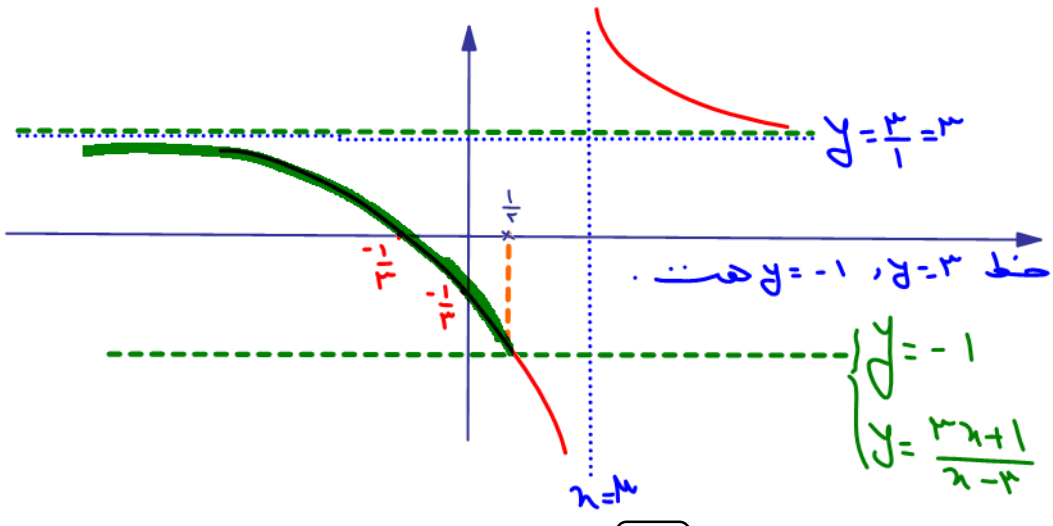
عدد $x=1$ جزا بقاری کرد گزینه‌های شامل $x=1$ غلطند.

راه نزدیم:

تابع هموگرافیک

$$y=-1 < y = \frac{3x+1}{x-3} < y=3$$

می‌خواهیم ببینیم برای کدام xها تابع هموگرافیک $y = \frac{3x+1}{x-3}$ بین دو خط $y=3$ و $y=-1$ هست؟

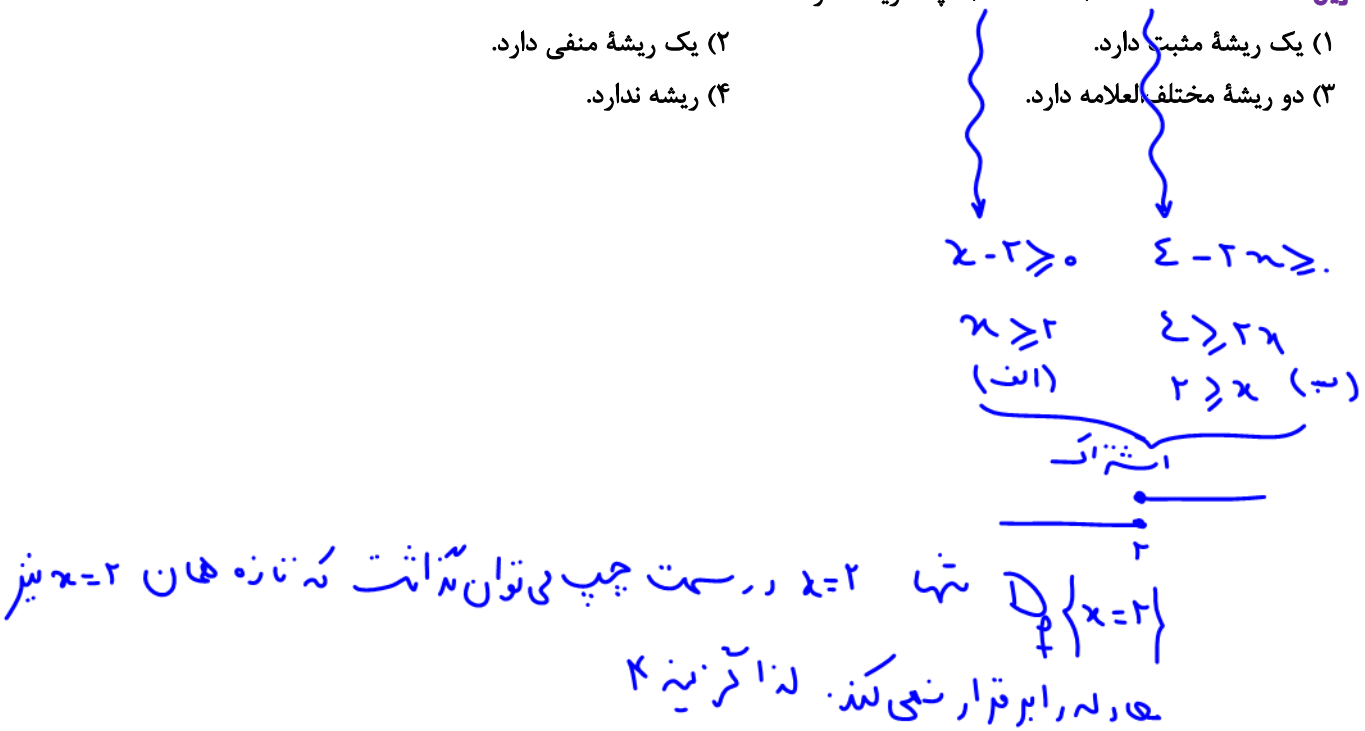


می‌بینم تابع $y = \frac{3x+1}{x-3}$ از $x < \frac{1}{2}$ بین دو خط $y=3$ و $y=-1$ هست.

$$\frac{3x+1}{x-3} = -1$$
$$3x+1 = -x+3$$
$$4x = 2$$
$$x = \frac{1}{2}$$

تمرین: معادلهٔ $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-2x}=5$ چند ریشه دارد؟

۱) یک ریشهٔ مثبت دارد.
۲) یک ریشهٔ منفی دارد.
۳) دو ریشهٔ مختلف‌العلامه دارد.
۴) ریشه ندارد.



تنها $x=2$ در سمت چپ می‌توان گذاشت که تنها همان $x=2$ نیز در رابطه را برقرار می‌کند. لذا گزینه ۲

تمرین: اگر x در دامنهٔ $|x-3|+|x-1|=f(x)$ تغییر کند، $f(x)$ در چه بازه‌ای تغییر می‌کند؟ برد $f(x)$ را می‌خواهد.

۱) $1 \le y \le 3$ ۲) $y \ge 2$ ۳) $-1 \le y \le 3$ ۴) $y \ge -2$

محدودکردن و کنترل گزینه‌ها:

با دادن عدد دلخواه $x=10$ داریم: $f(10)=|10-1|+|10-3|=16$

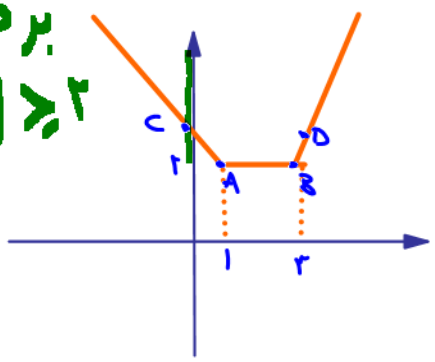
پس $f(x)$ می‌تواند $y=16$ هم باشد لذا گزینه یک و سه غلط اند.

از طرفی جمع دو قدرمطلق عبارتی نامنفی (مثبت یا صفر) است لذا گزینه ۴ هم غلط زیرا نوشته $y \ge -2$ پس y می‌تواند -2، -1 باشد که امکان ندارد و گزینه ۲ درست است.

$f(x)=|x-1|+|x-3|$ ← گذرون

$A\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ $B\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$ $C\begin{cases}x=0\\y=4\end{cases}$ $D\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$

برد: $y \ge 2$



نامنفی‌ها (مثبت یا صفر)

$\begin{cases}\sqrt[2k]{\square}\\|\square|\\(\square)^{2k}\end{cases} \ge 0$

$y=\sqrt{x} \ge 0$

$y=|x| \ge 0$

$y=(x-1)^2 \ge 0$

مثبت‌ها: تابع نمایی

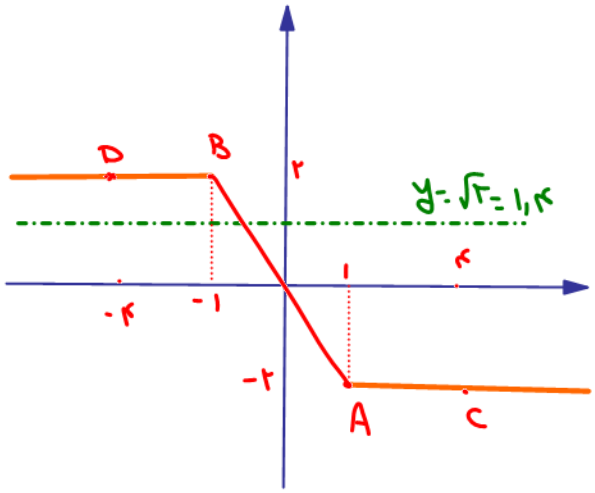
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ $0<a<1$

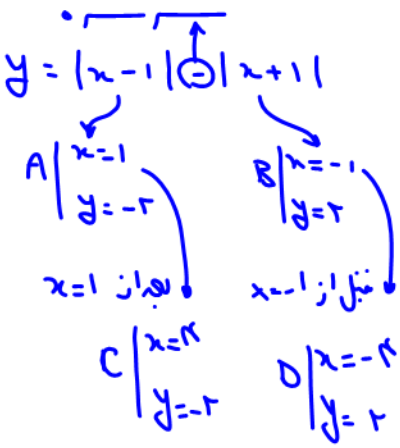
$y=2^x$ $a>1$

$y=a^x$ $a>0$

تمرین: خط $y=\sqrt{2}$ نمودار هندسی تابع $y=|x-1|-|x+1|$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

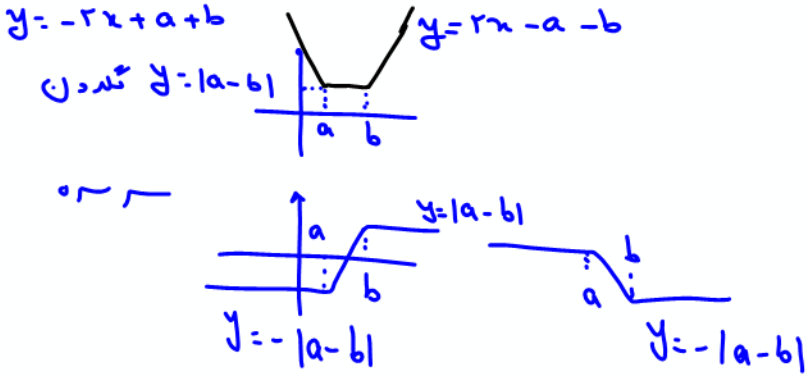
۱) ۱ ✓ ۲) ۲ ۳) هیچ ۴) بی‌شمار





$y=|x-a|+|x-b|$

$y=|x-a|-|x-b|$



یک به یک : هر خط افقی موازی محور xها تابع یک به یک را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. (یا قطع نمی‌کند یا فقط یک نقطه)

یک ل با یک x در ارتباط

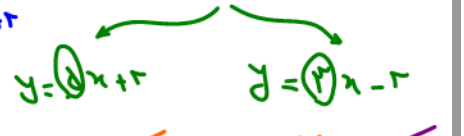
تمرین: کدام تابع زیر یک‌به‌یک است؟

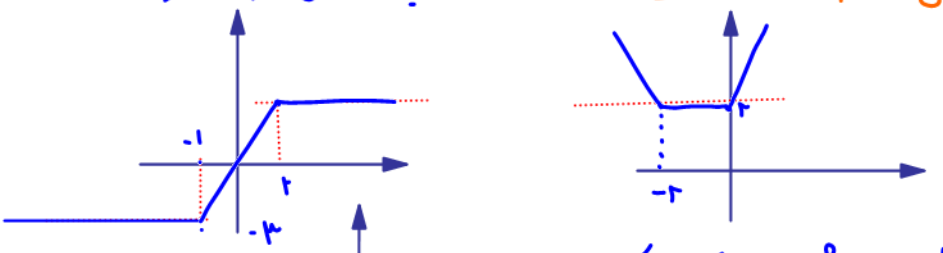
۱) $y=|x|+|x+2|$ گذرون ← تکه ثابت داره ← غیر یک به یک

۲) $y=|x+1|-|x-2|$ ← سر سر ●

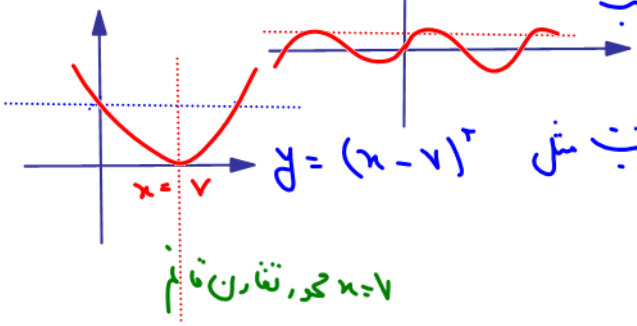
۳) ✓ $y=|x+2|+4x$

۴) $y=|x+2|+x$





نکته: اگر تابعی در یک بازه‌ای ثابت باشد یک به یک نیست زیرا یک ل با بی‌شمار x در ارتباط



اگر تابع متناوب باشد مثل $y=\sin x$ یک به یک نیست

اگر تابع محور تقارن قائم داشته باشد یک به یک نیست مثل $y=(x-۷)^۲$

$x=۷$ محور تقارن قائم

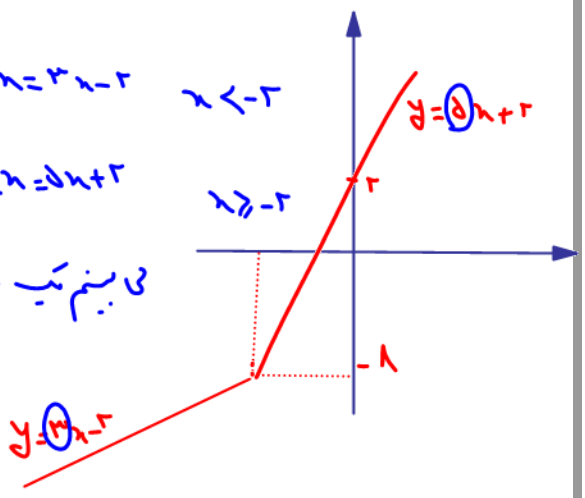
$y=|x+۲|+۴x$

$x+۲=۰ \rightarrow x=-۲$ ریشه

$x<-۲$: $|x+۲|+۴x=-x-۲+۴x=۳x-۲$

$x\geq -۲$: $|x+۲|+۴x=x+۲+۴x=۵x+۲$

می‌بینم یک به یک است



نکته: هر تابع که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد یک به یک است

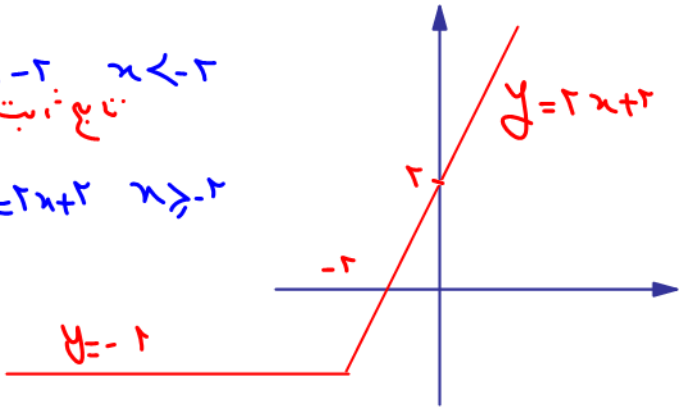
مثل همین تابع

$y=|x+۲|+x$

$x=-۲$ ریشه

$x<-۲$: $y=-x-۲+x=-۲$ تابع ثابت دار یک به یک نیست

$x\geq -۲$: $y=x+۲+x=۲x+۲$



تمرین: اگر $y=\sqrt[4]{\frac{2}{x^2}-\frac{9}{2}}+\sqrt[3]{2x-x^2}$ باشد، دامنه کدام است؟

۱) $[-\frac{2}{3},2]$ ۲) $[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$ ۳) $[-\frac{2}{3},0)\cup(0,2]$ ۴) $[-\frac{2}{3},0)\cup(0,\frac{2}{3}]$

عدد ۰=x ریشه مخرج $\frac{2}{x^2}$ است پس گزینه‌هایی که ۰=x دارند مردود و در نتیجه ۱ و ۲

عدد ۲=x که در گزینه‌ها هست $y=\sqrt[4]{\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0.5-(\frac{9}{2}=4.5)}$ زیر رادیکال ۴ را منفی می‌کند و غ ق ق است پس گزینه ۳ غلط و ۴ درست.

راه کلاسیک: برای محاسبه دامنه $\sqrt[2k]{x}$ دو تابع بین دامنه‌ها اشتراک می‌گیریم.

برای دامنه $\sqrt[2k]{U}$ باید $U\geq 0$ و برای $\sqrt[2k+1]{U}$ همان دامنه U را در نظر می‌گیریم

$$y=\sqrt[4]{\frac{2}{x^2}-\frac{9}{2}\geq 0}+\sqrt[3]{2x-x^2}$$

همان دامنه $2x-x^2$ که $\mathbb{R}$ است (همه)

$\frac{2}{x^2}\geq\frac{9}{2}$

$\frac{x^2}{2}\leq\frac{2}{9}$

$x^2\leq\frac{4}{9}$

$|x|\leq\frac{2}{3}$

$-\frac{2}{3}\leq x\leq\frac{2}{3}$ (ب)

$x=0$ ریشه مخرج است پس از مجموعه جواب حذف می‌شود

گزینه ۴: $[-\frac{2}{3},0)\cup(0,\frac{2}{3}]$ $\cap$ (همه) $=[-\frac{2}{3},0)\cup(0,\frac{2}{3}]$

معرفی لگاریتم، تابع لگاریتمی، تابع نمایی:

۸ چه توانی از ۲ هست؟ ۳

$2^3=8$ یعنی $\log_2^8=3$ (۳ به توان ۲ برابر ۸ است)

$\log_{10}^{1}=0$	$\log_{10}^{10}=1$
$\log_{10}^{100}=2$	$\log_{10}^{0.1}=-1$

$\log_b$ ← b = مبنا = پایه

تعریف لگاریتم:

$f(x)=\log_b^x=y \longleftrightarrow b^y=x$ (x به توان y)

b: base: مبنا = پایه

هر تابع دو به یک $y=b^x$ را برحسب x به دست بیاوریم مثل $b^y=x$ سپس جای x و y را عوض کنیم $f^{-1}(x)=b^x$ تابع وارون به دست می‌آید. تابع نمایی (متغیرش در توان است) وارون تابع لگاریتمی است.

دامنه تابع لگاریتمی: $y=\log_b^u$ با پایه $(u>0)\cap(b>0)\cap(b\neq 1)$

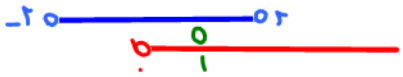
مثلاً دامنه $y=\log_x^{4-x^2}$ را بیابید.

$4-x^2>0 \rightarrow 4>x^2 \rightarrow 2>|x| \rightarrow -2<x<2$

$x>0$, $x\neq 1$

$D_f:(0,2)-\{x=1\}$

$D_f:(0,1)\cup(1,2)$



نکته: تعریف لگاریتم را در حالت نامساوی هم می‌توان به کار برد فقط و فقط مبنا بین صفر و یک است جهت نامساوی را عوض می‌کنیم. مثلاً برای محاسبه دامنه $y=\sqrt{\log_{0.2}^{3-x}}$ داریم:

$\sqrt{}$ شرط: $\log_{0.2}^{3-x}\geq 0$ (0.2 به توان ...)

$3-x\leq (0.2)^0=1$

$x\geq 2$ (الف)

$\log$ شرط: $3-x>0$

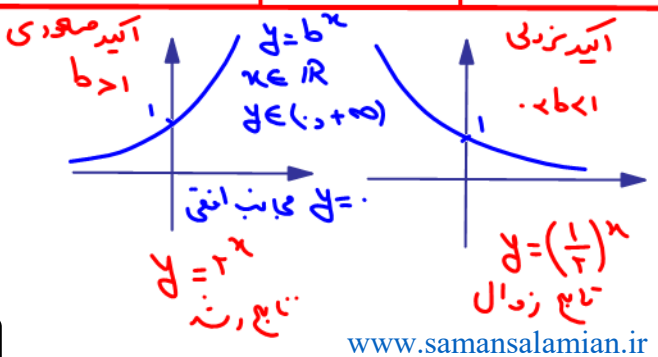
$0.2>0$ ✓

$0.2\neq 1$ ✓

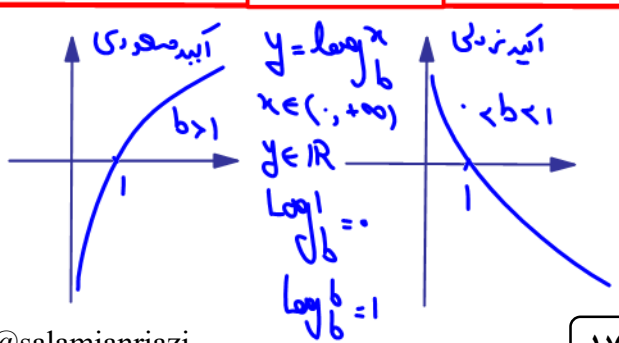
$x<3$ (ب)

$(2,3]$: (ب) ∩ (الف)

تابع نمایی



تابع لگاریتمی



تعرین: اگر $f(x)=\sqrt{1-\log(x^2-3x)}$ باشد، دامنه کدام است؟ راهنمایی: $\log_b a = c$

۱) $[-2,0)\cup(3,5]$ ۲) $[-2,3)$ ۳) $[-2,0)\cup(3,5)$ ۴) $(0,5]$

روش کنترل گزینه و عدد گذاری:

عدد $x=-1$ $f(-1)=\sqrt{1-\underbrace{\log(-2)}_{\text{غ ق ق}}}$ چون لگ را منفی می‌کند غ.ق.ق است

پس گزینه‌های شامل $x=-1$ یعنی گزینه ۲ و ۴ غلط هستند. چون $x=5$ در گزینه ۱ و ۳ مورد

امتحان است آن را کنترل می‌کنیم $f(5)=\sqrt{1-(\log_{25-15=10}^{10}=1)}=0$

پس $x=5$ باید در دامنه باشه پس گزینه ۱ درسته!

روش کلاسیک:

$y=\sqrt{1-\log x^2-3x}$

$\log$ شرط: $x^2-3x>0$

$x(x-3)>0$

	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$x^2-3x>0$		+	۰	-	۰	+	

(الف) $D_f=(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$

$\sqrt{}$ شرط: $1-\log x^2-3x\geq 0$

$1\geq \log x^2-3x$

10

$10^1=10\geq x^2-3x$

$0\geq x^2-3x-10$

$x^2-3x-10\leq 0$

$(x-5)(x+2)\leq 0$

5 -2

	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$x^2-3x-10\leq 0$		+	۰	-	۰	+	

(ب) $D_f=[-2,5]$

(الف) $\cap$ (ب)

تمرین: مجموعه جواب $|x^2+1|>|x-2|-2x+1$ کدام است؟

۱) $(-2,1)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(-1,2)$ ۴) $(1,2)$

شامل $x=0$ هستند

$x=0$ را در نامعادله بگذار

$|(0)^2+1|>|0-2|-2(0)+1$

$1 \not> -1$

$x=0$ در نامعادله صدق نکرد لذا گزینه‌های موردار غلط هستند

و جواب گزینه ۴

تمرین: حاصل $[\sqrt{x^2+1}]+[\frac{x^2+2}{x^2+1}]$ کدام است؟ (x عدد صحیح مثبت) مفهوم $[x]$

۱) $x+1$ ۲) x ۳) $x+2$ ۴) ۲

به عدد صحیح مثبت دلخواه مثل $x=2$ تبدیل کن:

$$\left[\frac{2^2+2=6}{2^2+1=5}=1,2\right]+\left[\sqrt{2^2+1=5}=2,\cdots\right]$$

$$1 + 2 = 3$$

آزمایش کنید که اگر $x=2$ به جواب ۳ برسید: فقط گزینه ۱

تمرین: اگر $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}=\frac{x}{(x^2-2x+1)}$ باشد، $A+B$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

روش کلاسیک:

$$\frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}=\frac{x}{(x-1)^2}$$

$$Ax-A+B=1x$$

بود ثابت

ی سیم ۲ طرف برابرند پس ضریب x سمت چپ باید یک باشد مثل سمت راست

$$A=1$$

و طرف راست عدد ثابت نداریم، طرف چپ هم نباید عدد ثابت داشته باشیم:

$$-A+B=0 \rightarrow A=B$$

$$A=1$$

$$B=1$$

$$A+B=2$$

روش سریع:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}=\frac{x}{x^2-2x+1}$$

$x=2$

$$\frac{A}{2-1}+\frac{B}{(2-1)^2=1}=\frac{2}{4-4+1}$$

$$A+B=2$$ گزینه ۲

تمرین: اگر $2x-\frac{1}{x}=A$ باشد، حاصل $x^3-\frac{1}{8x^3}$ کدام است؟

۱) $A^2+\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{A^2+3A}{4}$ ۳) $\frac{A^3+6A}{8}$

$y=\frac{x}{x+3}$

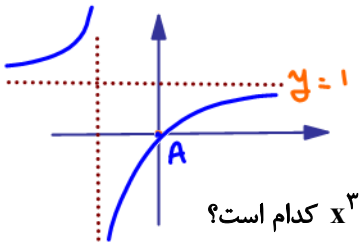
$x=-3$ مجانب قائم

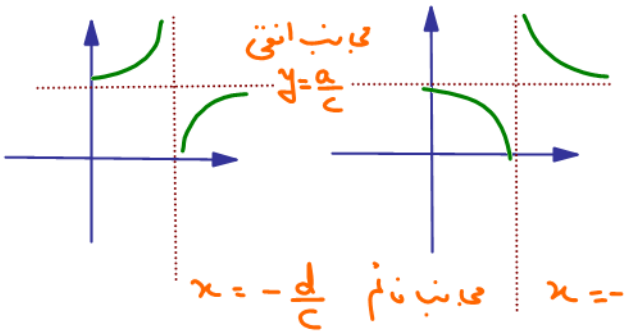
$y=\frac{1}{1}=1$ مجانب افقی

$A(0,0)$

$(a=1)(d=3)-(0)(1)>0$

شاخه‌ها صعودی





تابع هموگرافیک

مراحل رسم هموگرافیک:

ثانیه ① : ریشه مخرج $x=$ مجانب قائم است

ثانیه ② $y=\frac{\text{ضریب } x \text{ صورت}}{\text{ضریب } x \text{ مخرج}}$ مجانب افقی است

ثانیه ③ $A(0,y)$ $B(x,0)$

یک بار به x صفر داده y را پیدا می‌کنیم

یک بار به y صفر داده x را حساب می‌کنیم تا محل برخورد تابع با محورهای مختصات به دست آید.

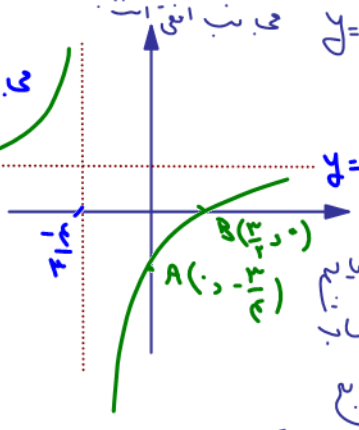
ثانیه ④ رسم شاخه‌ها

$y=\frac{2x-3}{3x+4}$

$2x-3=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$ مجانب قائم

$y=\frac{2}{3}$ مجانب افقی

$A\left(x=0, -\frac{3}{4}\right)$



دقت: در عبارت $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ راحت $ad-bc$ را بسازید.

اگر $ad-bc>0$ شاخه‌ها صعودی

اگر $ad-bc<0$ شاخه‌ها نزولی

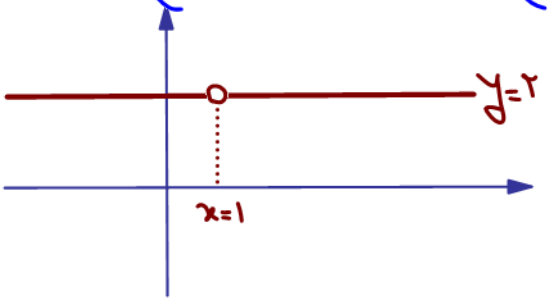
اگر $ad-bc=0$ یا $ad=bc$ یا $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ → شکل تبدیل به تابع ثابت $y=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ می‌شود که در ریشه مخرج توخالی است.

$y=\frac{2x-2}{x-1}=\frac{2(x-1)}{x-1}=2$

$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

$x\neq 1$

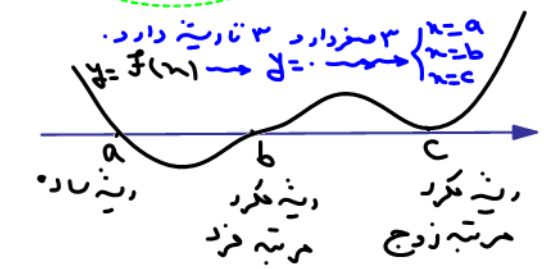
$D_f: \mathbb{R}-\{x=1\}$

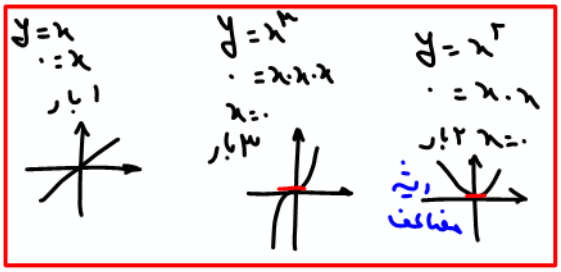


اگر $c=0 \rightarrow y=\frac{ax+b}{d}=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$ خط

تعیین علامت

نام ریشه در عبارات جبری:
حالتی که تابع به محور x ها می‌خورد
نام دیگر ریشه: صفر معادله است.





مثبت بودن تابع: بالای محور x ها بودن
منفی بودن تابع: زیر محور x ها بودن
صفر شدن تابع: ریشه دادن
مماس شدن: به محور x ها خوردن یا مماس شدن