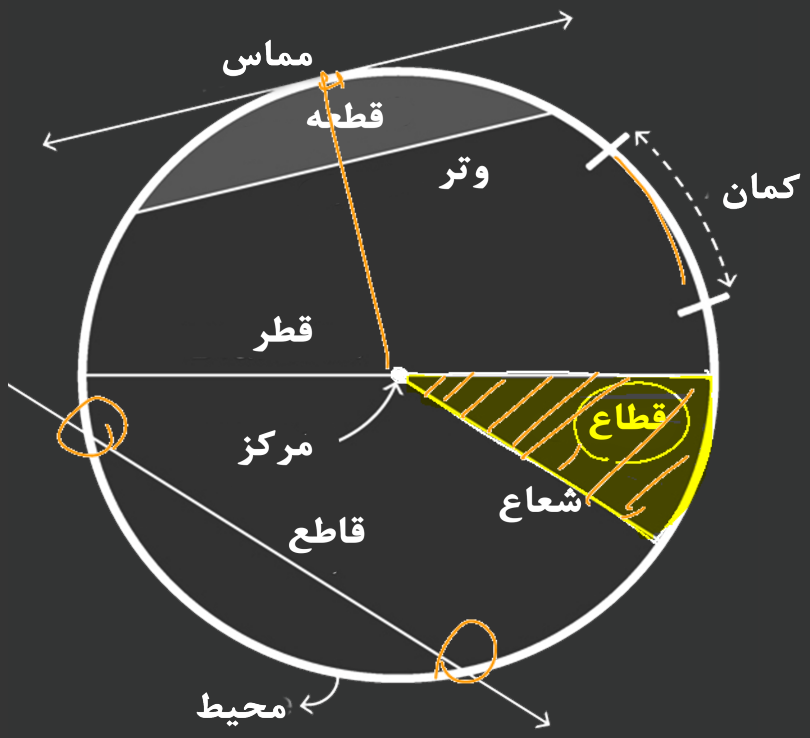
دکتر رها مسیح

کارنامه خرد

دایره



فصل یک هندسه یازدهم

زوایا
روابط طولی
محاطی – محیطی

نمره در امتحان نهایی

هشت نمره

تعداد تست

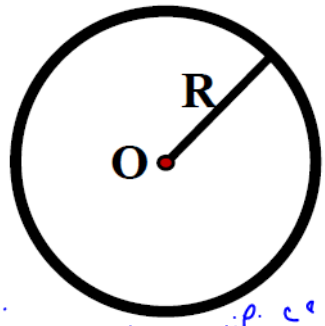
یک تست

پیش نیاز

زوایا سال هفتم
فصل ۱ هندسه دهم:همرسی های مثلث

دایره

مکان هندسی نقاطی که از یک نقطه ثابت به فاصله ثابت هستند

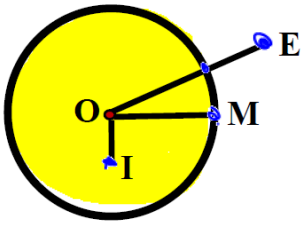


هر دایره صفحه را به سه بخش افراز می کند:

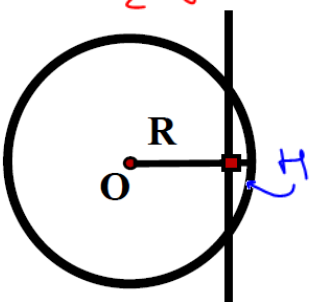
۱- داخل دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره کمتر از شعاع دایره است. $OI < R$

۲- روی دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره برابر شعاع دایره است. $OM = R$

۳- خارج دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره بیشتر از شعاع دایره است. $OE > R$

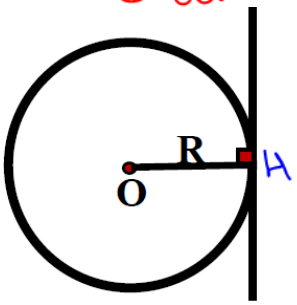


حالت های خط و دایره



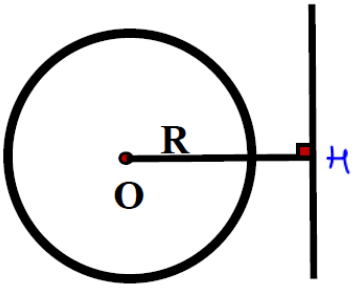
$OH < R$

۲ نقطه مشترک



$OH = R$

۱ نقطه مشترک

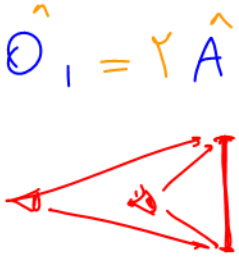


$OH > R$

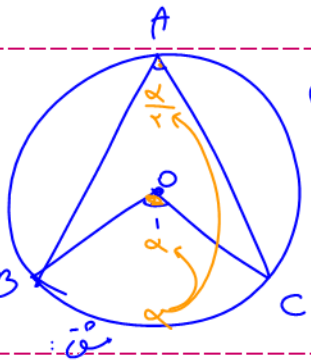
بدون نقطه مشترک

انواع زاویه در دایره

زاویه مرکزی



$\hat{O}_1 = 2\hat{A}$



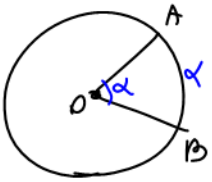
$\hat{O} = \overset{\frown}{AB}$

رأس = مرکز دایره

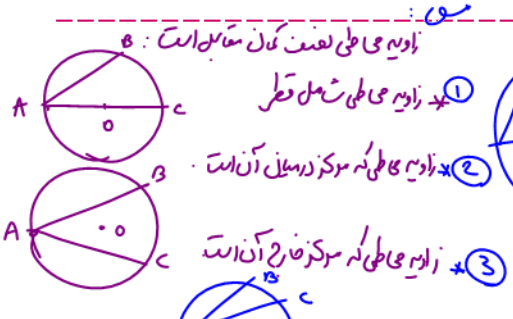
$OA = OB = r$

اضلاع شعاع ها

اندازه برابر با کمان مقابل



زاویه محاطی



زاویه محاطی نصف کمان مقابل است:

① زاویه محاطی شامل قطر

② زاویه محاطی که مرکز در میان آن است

③ زاویه محاطی که مرکز خارج آن است



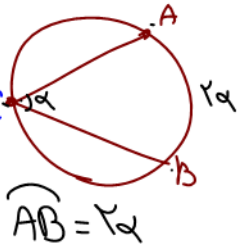
زاویه محاطی روبه قطر قائمه است

$C = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

رأس = روی محیط دایره

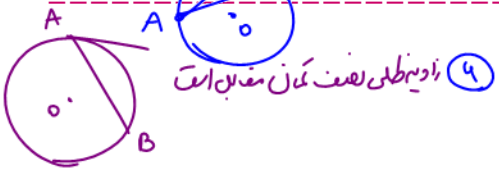
وترها CA و CB

اندازه کمان دو برابر زاویه



$\overset{\frown}{AB} = 2\alpha$

زاویه ظلی



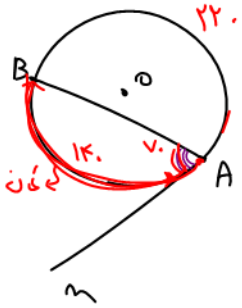
④ زاویه ظلی نصف کمان مقابل است

$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

رأس = روی محیط دایره

اضلاع ← یک وتر

یک خط مماس

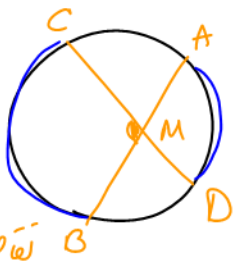


$360 - 220 = 140$

زاویه داخلی

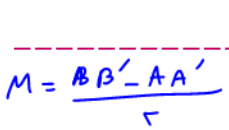
⑤ ثابت کنید زاویه داخلی نصف مجموع کمان‌ها (مقابل به رأس دو کمان است)

$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{AD}}{2}$

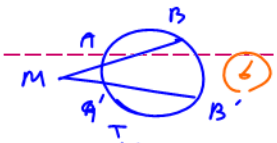


تقاطع دو وتر

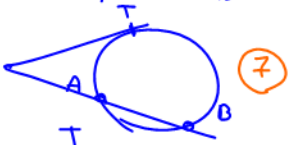
زاویه خارجی



$M = \frac{BB' - AA'}{2}$



⑥



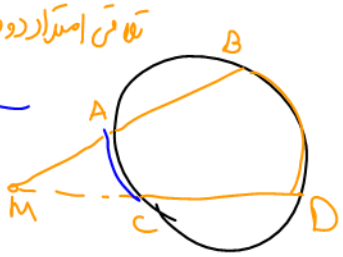
⑦



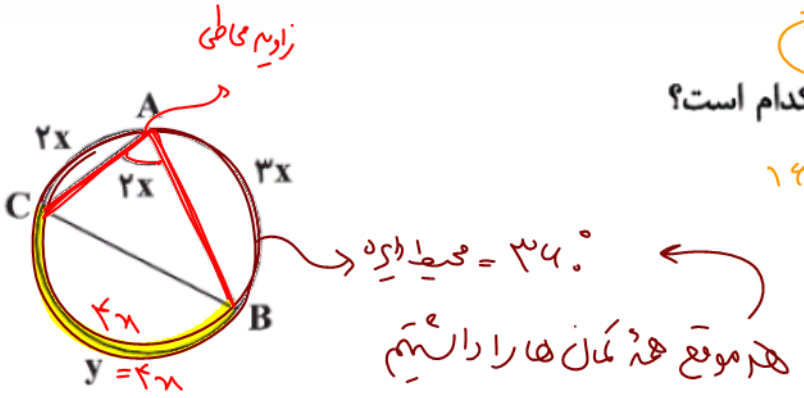
⑧

$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC}}{2}$

تقاطع امتداد دو وتر

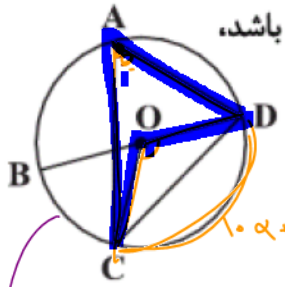


۱ با توجه به شکل مقابل، حاصل $x - y$ کدام است؟



۱) 90°
۲) 150°
۳) 120°
۴) 135°

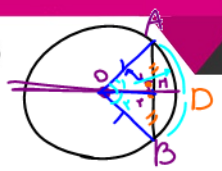
۲ در شکل زیر، BD قطر دایره است. اگر $\hat{A} = 7\alpha - 10^\circ$، $C\hat{O}D = 10\alpha + 20^\circ$ و O مرکز دایره باشد، کمان $\overset{\frown}{BC}$ چند درجه است؟



۱) ۱۵
۲) ۳۰
۳) ۴۵
۴) ۶۰

قضایای مهم

دو زاویه وتر ۹۰° روبرو



* فرض $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90$
* حکم $AH = HB$, $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB}$

مسئله: ثابت کنید.

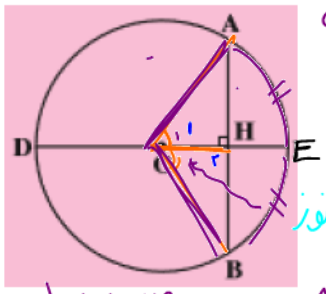
۱) ثابت کنید قطر عمود بر وتر، آن وتر و کمان نظیر آن را نصف می‌کند.

فرض: قطر عمود بر وتر
حکم: $AH = HB$, $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB}$

وتر: $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$
شعاع در دایره نصف است: $OA = OB = r$
ضلع مشترک: $OH = OH$

وتر → $\triangle OAH \cong \triangle OBH \Rightarrow AH = HB$
مرکزی → $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB}$

۲) ثابت کنید قطری که کمان نظیر یک وتر را نصف می‌کند بر آن عمود است.



فرض: $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EB}$
حکم: $H_1 = H_2 = 90^\circ$

مرکزی → $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$
$OH = OH$
$OA = OB = r$
فن زن → $\triangle OAH \cong \triangle OBH \rightarrow H_1 = H_2$, $H_1 + H_2 = 180$

وتر نداریم هنوز

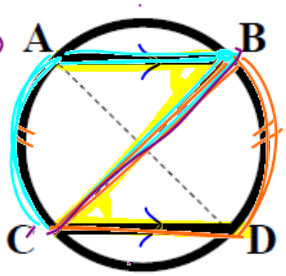
۳) ثابت کنید قطر نصف‌کننده وتر، کمان نظیر را نیز نصف می‌کند.

فرض: $AH = HB$
حکم: $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EB}$

$AH = HB$
$OA = OB$
$OH = OH$
فن فن → $\triangle OAH \cong \triangle OBH \rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$ مرکزی → $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EB}$

$H_1 = H_2 = 90$ عمود است

۴) ثابت کنید کمان‌های محدود بین دو خط موازی برابرند.



$\overset{\frown}{AB} \neq \overset{\frown}{CD}$ لزوماً برابر نیست!!

فرض: $AB \parallel CD$ / BC → خطوط موازی مورب → $\hat{ABC} = \hat{BCD}$ → محاطی → $\frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}$

حکم: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$

$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$

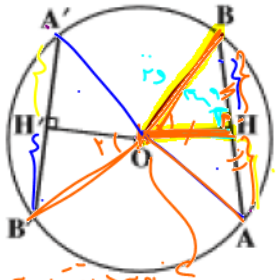
۵) ثابت کنید اگر کمان‌های محدود بین دو خط برابر باشند، آن دو خط موازی‌اند.

فرض: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ → محاطی → $\hat{B} = \hat{C}$ → $AB \parallel CD$
حکم: $AB \parallel CD$

عکس خطوط موازی مورب

برابری وتر ⇒ فاصله

۶) ثابت کنید دو وتر که به فاصله برابر از مرکز قرار دارند با هم برابرند.



فرض: $OH = OH'$
حکم: $AB = A'B'$

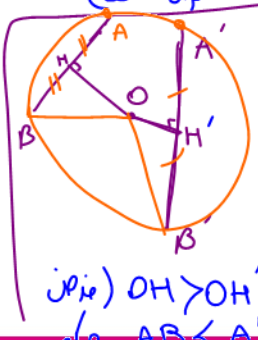
$OH = OH'$
$H = H' = 90$
$OB = OB'$
وتر → $\triangle OBH \cong \triangle OB'H' \rightarrow BH = B'H'$
$AB = A'B' \leftarrow 2BH = 2B'H'$ ×۲

$OB^2 = OH^2 + BH^2$
$OB'^2 = OH'^2 + B'H'^2$ → $BH = B'H'$
$AB = A'B'$ ×۲

برابری وتر ⇒ برابری فاصله

۷) ثابت کنید وتر بزرگ‌تر به مرکز نزدیک‌تر است.

فرض: $AB < A'B'$
حکم: $OH > OH'$



$OB = OA$
$OB' = OA'$
شعاع

$OB^2 = OH^2 + HB^2$
$OB'^2 = OH'^2 + H'B'^2$
$OB = OB'$
$OH^2 + HB^2 = OH'^2 + H'B'^2$
$OH^2 < OH'^2$
$OH < OH'$

۸) ثابت کنید وتر بزرگ‌تر از مرکز دورتر است.

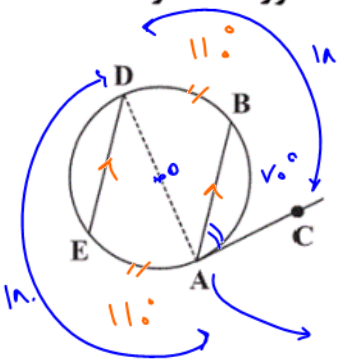
فرض: $OH > OH'$
حکم: $AB < A'B'$

$OH^2 + BH^2 = OH'^2 + B'H'^2$
مساوری
$BH < B'H'$
$2a \downarrow$
$AB < A'B'$

$OH' < OH$ فاصله کمتر

۳ در شکل روبه‌رو $AB \parallel DE$ ، AC مماس بر دایره و $\overset{\frown}{AE} = ۱۱۰^\circ$ می‌باشد، در این صورت اندازهٔ زاویهٔ $B\hat{A}C$ کدام است؟ (AD قطر دایره است.)

۱) ۳۵°
۲) ۷۰°
۳) ۴۰°
۴) ۴۵°

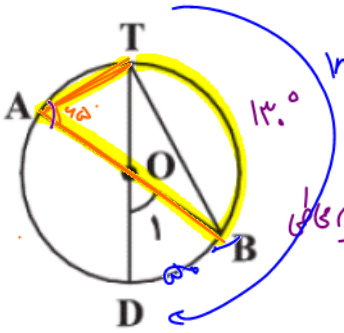


نصف کمان مقابل = ظلی

$$\text{ظلی } B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BA}}{۲} = \frac{۷۰}{۲} = ۳۵^\circ$$

۴ در شکل مقابل، O مرکز دایره و $\hat{A} = ۶۵^\circ$ است. اندازهٔ زاویهٔ $O_۱$ کدام است؟

۱) ۶۵°
۲) ۶۰°
۳) ۵۰°
۴) ۴۵°



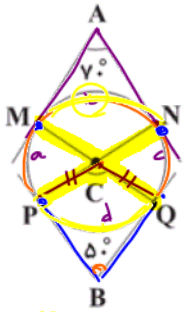
زاویه محاطی $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{TB}}{۲}$

$$۶۵^\circ = \frac{\overset{\frown}{TB}}{۲} \rightarrow \overset{\frown}{TB} = ۱۳۰^\circ$$

$C = \frac{d+b}{2} = \frac{240}{2} = 120^\circ$

۵ در شکل روبه‌رو اضلاع زوایای A و B بر دایرهٔ مرسوم مماس هستند. در این صورت اندازهٔ زاویهٔ C کدام است؟

۱) 100°
۲) 120°
۳) 80°
۴) 140°



$A = \frac{a+d+c-b}{2}$

$140 = a+d+c-b$
$100 = a+b+c-d$

$\Rightarrow 240 = 2a+2c$

$120 = a+c$ ✓





شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است

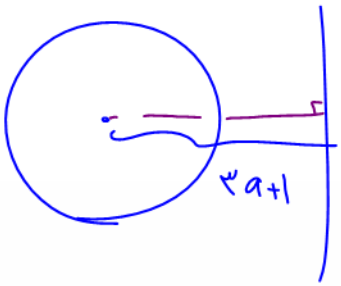
$a+b+c+d = 360^\circ$

120

$b+d = 240$

۶ دایرهٔ $C(O, 7)$ و خط ℓ به فاصلهٔ $3a+1$ از مرکز آن مفروض‌اند. اگر خط و دایره هیچ نقطهٔ تقاطعی نداشته باشند، مقدار a کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) ۱
۲) $\frac{3}{2}$
۳) ۲
۴) ۳

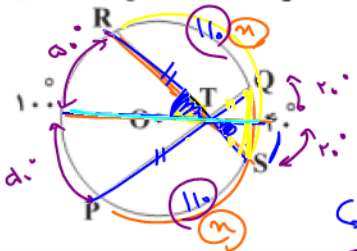


$3a+1 > 7$

$3a > 6 \rightarrow a > 2$

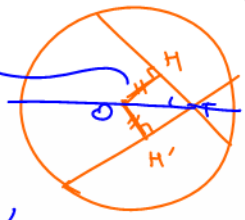
۷ در دایرهٔ $C(O, r)$، وترهای PQ و RS با هم برابر بوده و یکدیگر را در نقطهٔ T قطع کرده‌اند. اگر $\overset{\frown}{RP} = 100^\circ$ و $\overset{\frown}{QS} = 40^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ OTR کدام است؟

۱) 70°
۲) 35°
۳) 30°
۴) 40°



زاویه $= \frac{50+20}{2} = \frac{70}{2} = 35^\circ$

دو وتر دایره بین از مرکز هم فاصله اند ← نتیجه OH = OH'



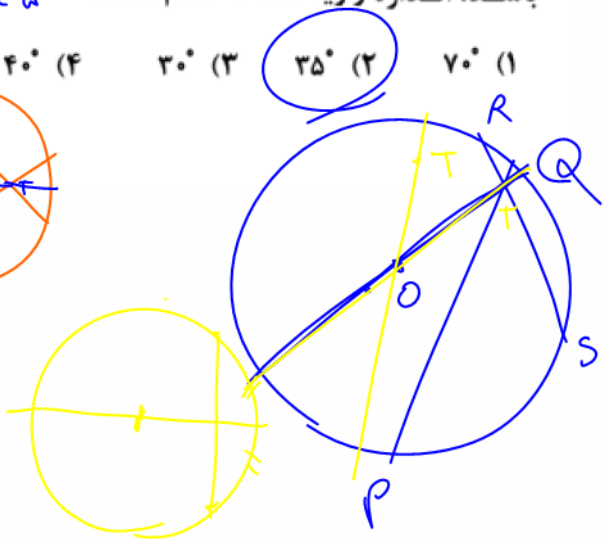
$RS = PQ$ دو وتر دایره

$\Rightarrow \overset{\frown}{RS} = \overset{\frown}{PQ}$

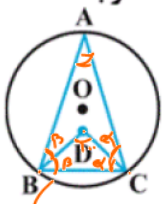
$\overset{\frown}{RQ} + \overset{\frown}{QS} = \overset{\frown}{PS} + \overset{\frown}{QS}$

$2x + 240 + 100 = 360$

$\star \quad 2x = 220 \Rightarrow x = 110$



۸ در شکل زیر، نقطهٔ D محل تقاطع نیمسازهای دو زاویهٔ B و C است. اگر $B\hat{D}C = 100^\circ$، آن‌گاه کمان BC چند درجه است؟



۱) ۲۰
۲) ۸۰
۳) ۶۰
۴) ۴۰

$\beta+\alpha+100=180$

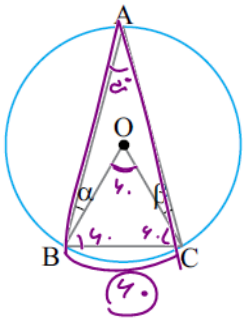
$\beta+\alpha=80$

$2\beta+2\alpha=160$

$A=180-160=20$

$\overset{\frown}{BC}=2\hat{A}=40^\circ$

۹ در شکل مقابل مثلث OBC متساوی‌الاضلاع است. حاصل $\alpha+\beta$ کدام است؟ (O مرکز دایره)

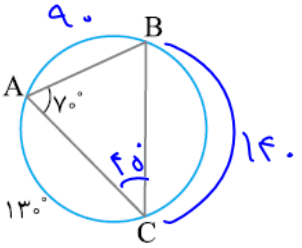


۱) 10°
۲) 20°
۳) 30°
۴) 40°

$30+\alpha+40+\beta+60=180$

$\alpha+\beta=30$

۱۰ در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی C کدام است؟



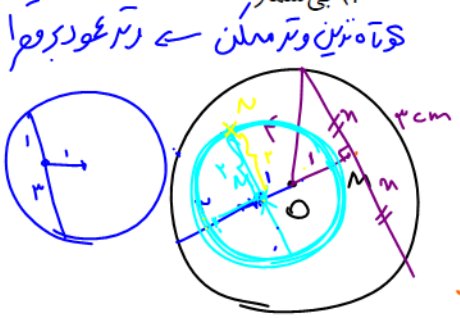
۱) 70°
۲) 60°
۳) 65°
۴) 45°

$130^\circ+140^\circ=270^\circ$

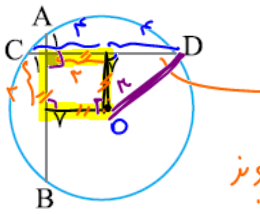
$360-270=90$

۱۱ دایره‌ی $C(O, ۴)$ و نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۱ از مرکز دایره مفروض است. چند وتر داخل دایره می‌توان رسم کرد که طول آن ۲ باشد و از M بگذرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

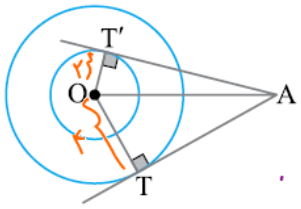


۱۲ مطابق شکل مقابل، دو وتر AB و CD بر هم عمودند. اندازه‌ی شعاع این دایره چقدر است؟



۱) $۳\sqrt{۲}$
۲) ۵
۳) $۴\sqrt{۲}$
۴) ۶

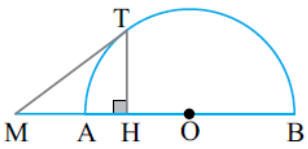
۱۳ مطابق شکل دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۲ و ۴ مفروض‌اند. از نقطه‌ی A دو مماس بر دو دایره رسم شده است. تفاضل مربعات طول این دو مماس چقدر است؟



۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰

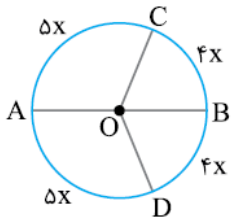
آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

۱۴ در نیم‌دایره‌ی شکل مقابل $AB=۳$ و $AM=۱$. اگر MT بر نیم‌دایره مماس باشد، طول پاره خط MH چقدر است؟



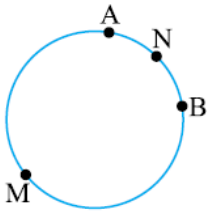
۱) ۱/۵
۲) ۱/۶
۳) ۱/۴
۴) ۱/۸

۱۵ در شکل مقابل AB قطر دایره و O مرکز آن است. اندازه‌ی زاویه‌ی COD کدام است؟



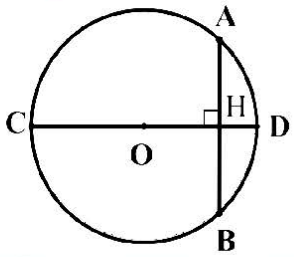
۱) ۱۶۰°
۲) ۱۵۰°
۳) ۱۴۰°
۴) ۱۳۰°

۱۶ در شکل مقابل اگر $\overset{\frown}{AMB}=۴\overset{\frown}{ANB}$، کمان ANB چه کسری از محیط دایره است؟

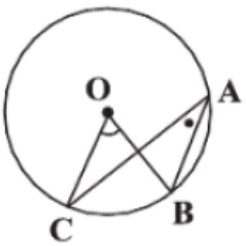


۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۶}$
۴) $\frac{۱}{۵}$

در شکل مقابل وتر AB بر قطر CD عمود است. ثابت کنید قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند. خرداد ۱۴۰۳
۱/۵ نمره

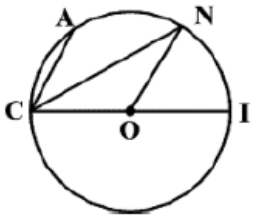


۱۷ دایرهٔ $C(O, ۶)$ مفروض است. اگر $\hat{O} = (۲x + ۱۰)^\circ$ و $\hat{A} = (۳x - ۳۵)^\circ$ باشد، طول کمان BC کدام است؟



۱) $\frac{۵\pi}{۳}$
۲) ۲π
۳) $\frac{۸\pi}{۳}$
۴) $\frac{۱۰\pi}{۳}$

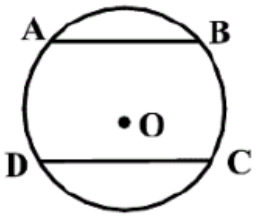
۱۸ در شکل مقابل، CI قطر دایره و $CA \parallel ON$. اگر $\overset{\frown}{AC} = ۴۰^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ CNO کدام است؟ (O مرکز دایره است.)



۱) $۲۷/۵^\circ$
۲) ۳۰°
۳) ۳۵°
۴) $۳۲/۵^\circ$

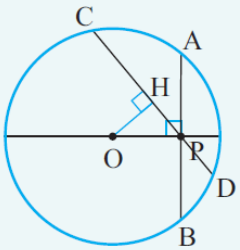
آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

۱۹ مطابق شکل زیر، در دایرهٔ به مرکز O و شعاع ۵ واحد، دو وتر موازی $AB = ۶$ و $CD = ۸$ در طرفین مرکز دایره رسم شده‌اند. مساحت ذوزنقهٔ ABCD کدام است؟

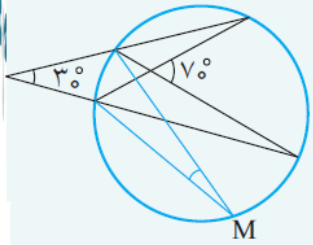


۱) ۵۶
۲) ۴۹
۳) ۴۲
۴) ۳۵

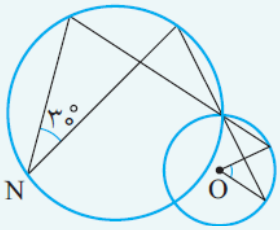
۲۰ نقطهٔ P درون دایره است. بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین وتر گذرنده از P چه هستند؟



۲۱ زاویهٔ $\widehat{M}$ را به دست آورید.

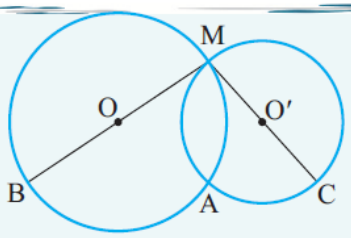


۲۲ زاویهٔ O را به دست آورید.

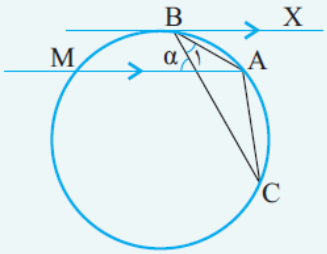


آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

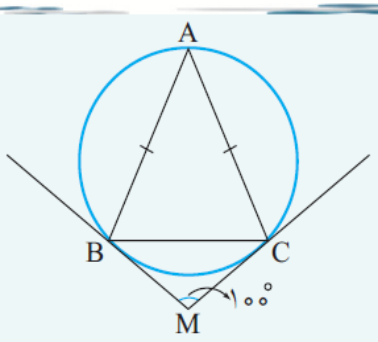
۲۳ نشان دهید نقاط A، B و C روی خط راست هستند.



۲۴ $\hat{B}_1 = ۳۰^\circ$، $\hat{C} = ۲۰^\circ$ و $BX \| MA$. زاویهٔ α را به دست آورید.

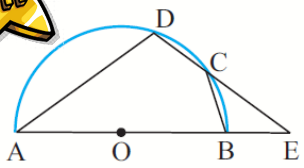


۲۵ MB و MC مماس بر دایره هستند و $AB = AC$. زاویه $\hat{A}$ را به دست آورید.



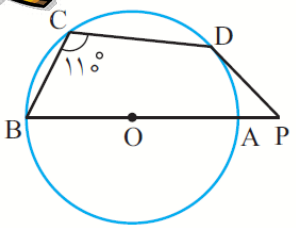
آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

۲۶ در شکل روبه‌رو، نیم‌دایره‌ای به قطر AB رسم شده است. اگر $BC = CD$ و $AD = DE$. اندازهٔ زاویهٔ A چند درجه است؟



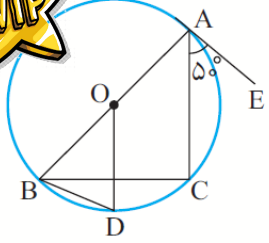
۱) ۲۴°
۲) ۳۰°
۳) ۳۶°
۴) ۴۲°

۲۷ در شکل روبه‌رو، AB قطر دایره است، PD بر دایره مماس است و $\hat{C} = 110°$. اندازهٔ زاویهٔ P چند درجه است؟



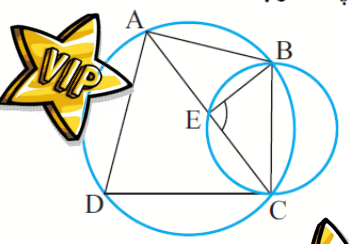
۱) ۵۰°
۲) ۶۰°
۳) ۴۵°
۴) ۵۵°

۲۸ در شکل روبه‌رو، AE بر دایره مماس است و OD با AC موازی است. اندازهٔ زاویهٔ $\hat{CBD}$ چند درجه است؟



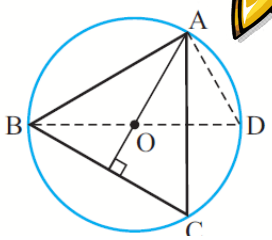
۱) ۱۵°
۲) ۲۰°
۳) ۲۵°
۴) ۳۰°

۲۹ در شکل روبه‌رو، CD بر دایرهٔ کوچک مماس است. اگر $B\hat{A}D = 100°$، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ $B\hat{E}C$ چند درجه است؟



۱) ۸۰°
۲) ۱۰۰°
۳) ۴۰°
۴) ۵۰°

۳۰ در شکل روبه‌رو، O محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است. زاویهٔ $A\hat{O}D$ برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی ـ ۹۲)



۱) $O\hat{B}C$
۲) $C\hat{A}D$
۳) $O\hat{A}C$
۴) $A\hat{D}O$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

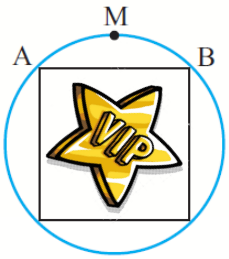
۳۱ در مثلث ABC، داریم $\hat{B}=50^\circ$ و $\hat{C}=60^\circ$ نیمساز داخلی زاویه A و عمودمنصف ضلع BC در نقطه M متقاطع‌اند. زاویه $M\hat{B}C$ چند درجه است؟

۱) 25° ۲) 30° ۳) 35° ۴) 40°

۳۲ در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB=AC)$ نقطهٔ O در امتداد AC، مرکز دایره‌ای است که در نقطهٔ B بر ضلع AB مماس است. امتداد BC این دایره را در D قطع کرده است. مثلث OCD چگونه است؟ (سراسری ریاضی ـ ۹۴)

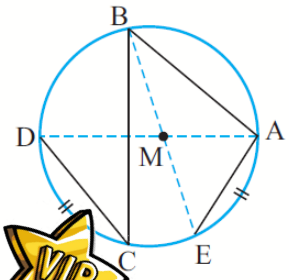
۱) متساوی‌الساقین ۲) قائم‌الزاویه ۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ۴) غیرمشخص

۳۳ در شکل مقابل، ضلع مربع برابر ۲ واحد است، فاصلهٔ وسط کمان AB از نزدیک‌ترین رأس مربع چقدر است؟



۱) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$
۲) $\sqrt{4-2\sqrt{2}}$
۳) $\sqrt{2}$
۴) $\sqrt{1+\sqrt{2}}$

۳۴ در شکل مقابل، اگر $AB=6$، $BC=8$، $CD=3$ و $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{CD}$، آن‌گاه اندازهٔ AM کدام است؟ (سراسری خارج از کشور ریاضی ـ ۹۳)



۱) ۲
۲) ۲/۲۵
۳) ۲/۵
۴) ۲/۷۵

۳۵ در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره‌ای به مرکز یک رأس آن و شعاع ۲/۵ واحد، دو ضلع مربع را قطع می‌کند. فاصله نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطه تقاطع، کدام است؟ (سراسری ریاضی ـ ۹۵)

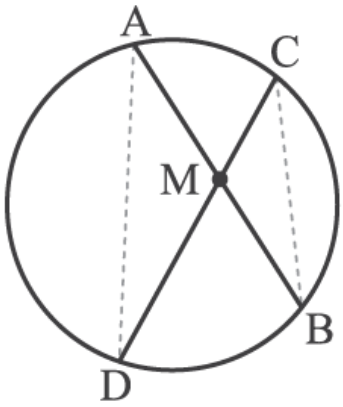
۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳۶ مربع $ABCD$ به ضلع ۴ واحد، مفروض است. شعاع دایرهٔ گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟ (سراسری خارج از کشور ریاضی ـ ۹۵)

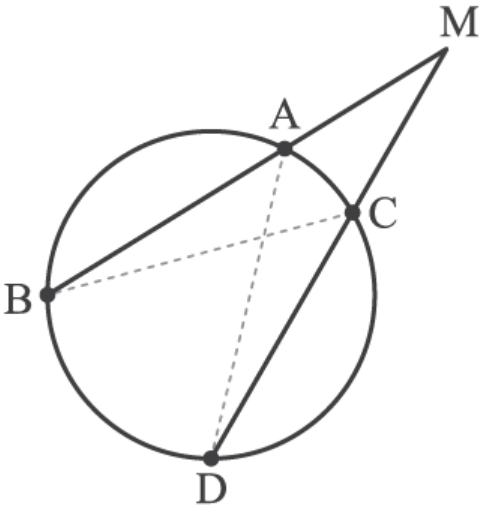
۱) ۲/۲۵ ۲) ۲/۵ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۳

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

روابط طولی در دایره



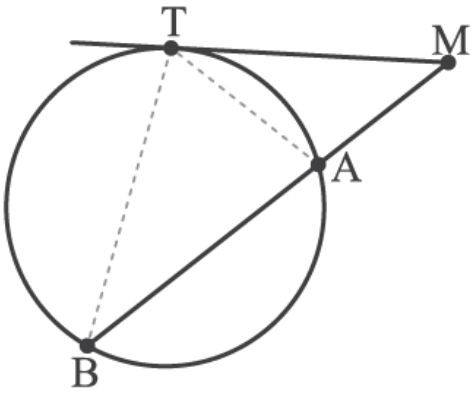
$$\mathbf{AM}.BM = \mathbf{CM}.DM$$

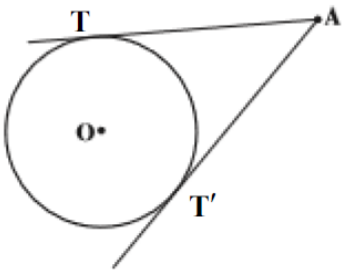


$$\mathbf{AM}.BM = \mathbf{CM}.DM$$

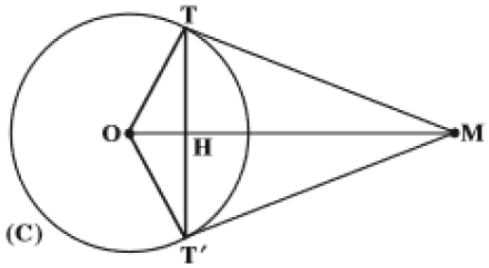
از اینرو، هر سهٔ این قضایا دارای طرح کلی یکسانی می باشند:

$$(\text{vertex to circle}) \cdot (\text{vertex to circle}) = (\text{vertex to circle}) \cdot (\text{vertex to circle})$$



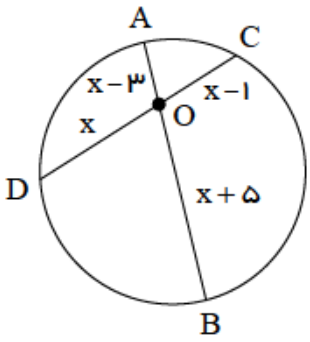


خط مماس بر دایره



- OM نیمساز $\hat{O}$ و نیمساز $\hat{M}$ است.
- OM عمود منصف TT' است.
- $OH \times OM = R^2$
- $TT'^2 = 4OH \times MH$
- $TT' \times OM = 2R \times MT$
- $MT = MT'$

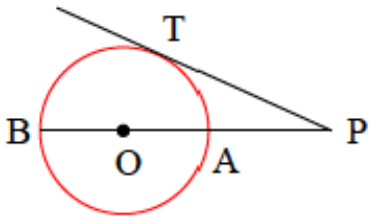
۳۷ در شکل مقابل x برابر است با:



۱) ۵
۲) ۱۰
۳) ۸
۴) گزینه های «۱» و «۲»

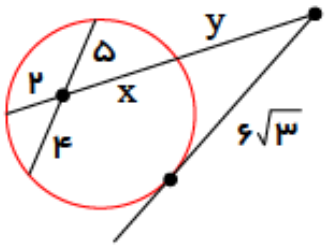
۳۸ در شکل مقابل شعاع دایره ۶ و AB قطر و $PA = ۴$ می باشد، طول مماس PT کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$
۲) $۵\sqrt{۲}$
۳) ۱۴
۴) ۸

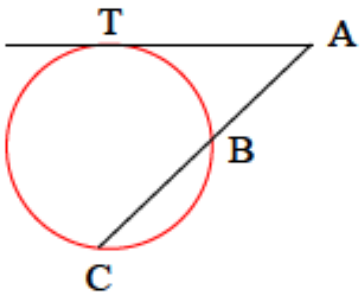


۳۹ در شکل مقابل مقدار y کدام است؟

۱) ۶
۲) ۷٫۵
۳) ۸
۴) ۹

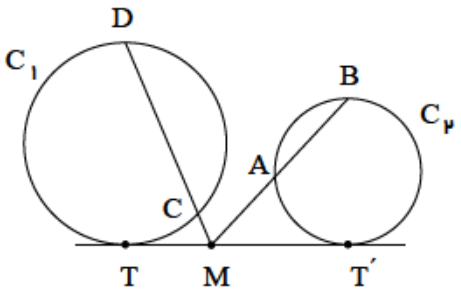


۴۰ در شکل، AT مماس وکمان های $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CT} = ۲\overset{\frown}{BT}$. زاویه A چند درجه است؟



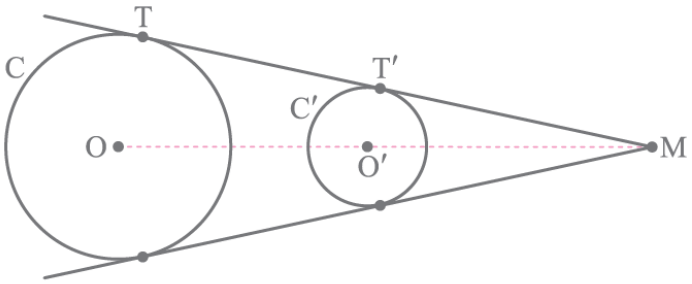
① ۱۸°
② ۷۲°
③ ۳۶°
④ ۱۴۴°

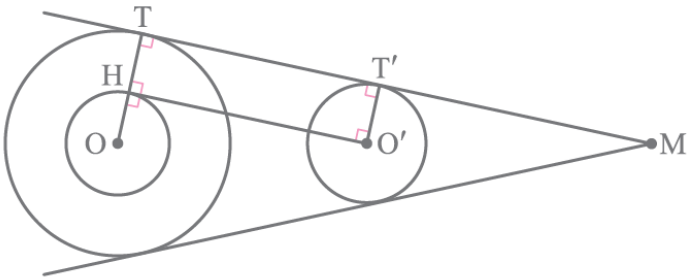
۴۱ در شکل مقابل T و T' نقاط تماس هستند. اگر $MT = \frac{۱}{۳}MT'$ باشد، حاصل $\frac{MA \cdot MB}{MC \cdot MD}$ کدام است؟

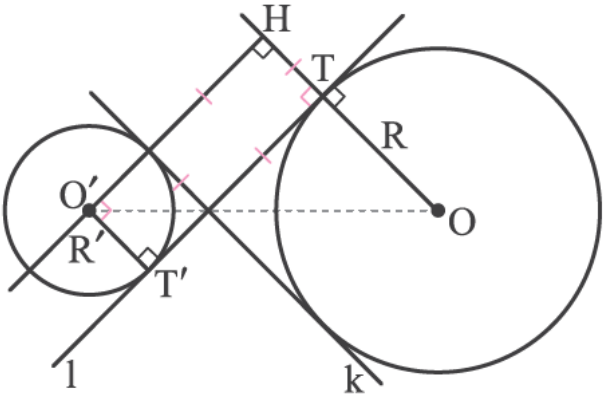


① ۴
② ۳
③ $\frac{۱}{۹}$
④ ۹

مماس مشترک







فاصله ی دو مرکز همان فاصله ی دو نقطه است که اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ باشد، از رابطه ی زیر به دست می آید:

«متخارج» :

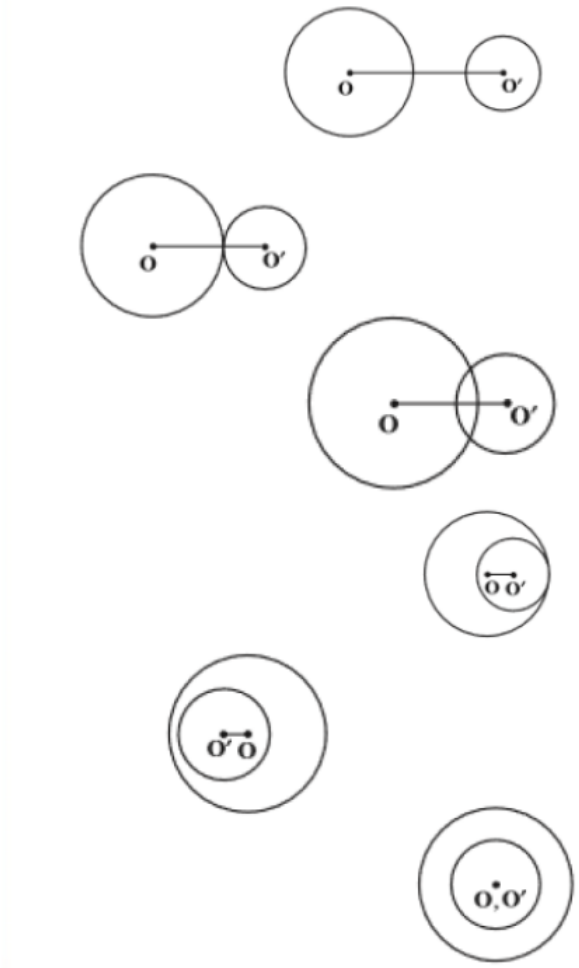
«مماس خارج» :

«متقاطع» :

«مماس داخل» :

«متداخل» :

«هم مرکز» :



۴۲ اگر دو دایره را به مراکز $O(2,-3)$ و $O'(1,4)$ داشته باشیم، شعاع دایره ی اول ۲ و شعاع دایره ی دوم ۳ باشد، دو دایره در چه وضعیتی نسبت به هم قرار دارند؟

۴۳ دو دایرهٔ $C(O, ۱۷)$ و $C'(O, ۱۰)$ مفروضند. خط قاطع d که در دایرهٔ C وتری به طول ۳۰ به وجود می‌آورد، در دایرهٔ C' وتری با کدام طول پدید می‌آورد؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۸

۴۴ دو دایره‌ی $C_۱$ و $C_۲$ به شعاع ۵ مماس خارجند. چند خط می‌توان رسم کرد که بر دایره‌ی $C_۱$ مماس باشد و در دایره‌ی $C_۲$ وتری به طول ۶ جدا کند؟

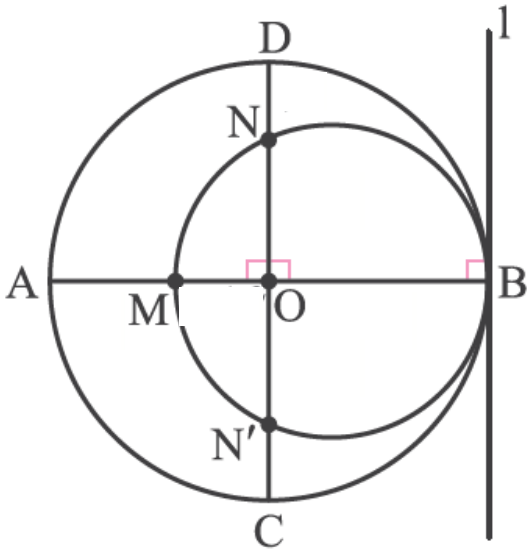
① صفر ② ۲ ③ ۴ ④ بی شمار

۴۵ دو دایره به شعاع‌های ۷ و ۲ مفروض‌اند. اگر اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره برابر ۱۲ واحد باشد، بیش‌ترین فاصلهٔ بین نقاط روی دو دایره از هم چقدر است؟

① ۲۰ ② ۲۱ ③ ۲۲ ④ ۲۳

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

۴۶ در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ‌تر بر هم عمودند. اگر $AM=16$ و $ND=10$، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.

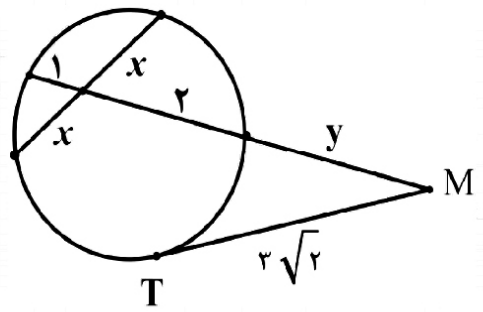


ثابت کنید هرگاه خط‌های شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه‌ای مانند M (بیرون دایره) یکدیگر را قطع کنند، آن‌گاه: $MA.MB=MC.MD$

خرداد ۱۴۰۳
۱/۵ نمره

در شکل زیر MT به طول $3\sqrt{2}$ مماس بر دایره است. مقادیر عددی x و y را به‌دست آورید.

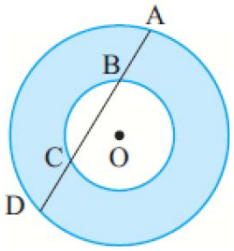
خرداد ۱۴۰۳
۱/۲۵ نمره



آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

دکتر رها مسیح

۴۷ در شکل روبه‌رو، وتر AD از دایرهٔ بزرگ‌تر، دایرهٔ کوچک‌تر را در نقاط C و B قطع کرده است. اگر $AB = ۴$ و $BC = ۵$، آن‌گاه مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟

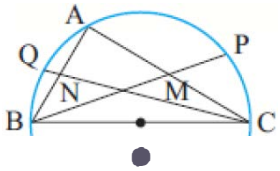


۱) ۲۰π
۲) ۶π
۳) ۱۶π
۴) ۲۵π

۴۸ نقطهٔ P به روی وتر AB به طول ۱۵ واحد از دایره‌ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ به ۴ تقسیم کرده است. طول کوتاه‌ترین وتر از دایره گذرنده بر نقطهٔ P کدام است؟ (سراسری ریاضی ـ ۸۲)

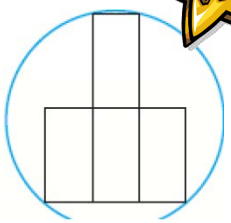
۱) ۹
۲) ۱
۳) ۱۵
۴)

۴۹ در شکل روبه‌رو، $BC = ۶$ قطر دایره و میانه‌های BM و CN در مثلث ABC امتداد یافته‌اند تا دایره را در نقاط P و Q قطع کنند. مقدار $BM.MP+CN.NQ$ برابر با کدام است؟



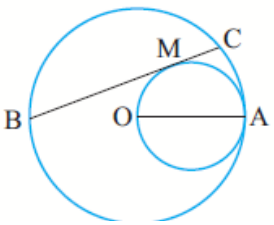
۱) ۴
۲) ۹
۳) ۱۶
۴) ۳۶

۵۰ چهار تا مستطیل ۴×۲ مطابق شکل روبه‌رو در یک دایره قرار گرفته‌اند. طول قطر دایره کدام است؟



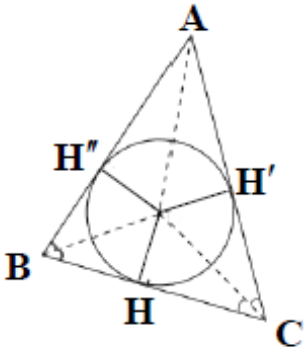
۱) $\sqrt{۸۴}$
۲) $\sqrt{۸۵}$
۳) $\sqrt{۸۶}$
۴) $\sqrt{۸۷}$

۵۱ در دایره‌ای به شعاع OA وتر BC مماس بر دایره‌ای به قطر OA رسم شده است. مقدار $MB.MC$ برابر کدام است؟ (سراسری خارج از کشور ریاضی ـ ۹۴)

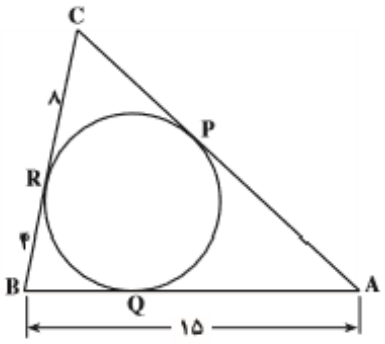


۱) $MO^۲$
۲) $MA^۲$
۳) $OA^۲$
۴) $MA.MO$

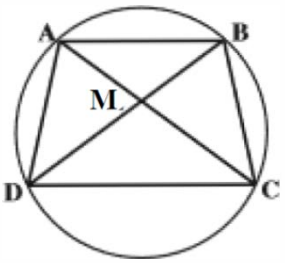
آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید



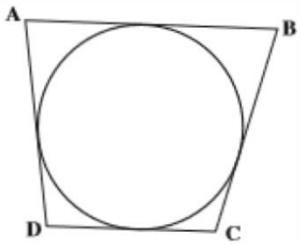
$$r_a = \frac{S}{P-a}$$
$$r_b = \frac{S}{P-b}$$
$$r_c = \frac{S}{P-c}$$

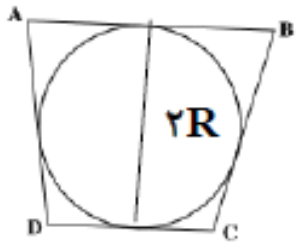


چندضلعی محاطی



چند ضلعی محیطی





$$(\underline{۲R})^{۲} = AB \times CD$$

ارتفاع

۵۲ یک ذوزنقه ی متساوی الساقین بر دایره ای به شعاع ۳ محیط است، اگر مساحت ذوزنقه ۴۵ باشد، طول ساق آن کدام است؟

۵۳ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۳ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

۵۴ یک ذوزنقه ی متساوی الساقین بر دایره ای به شعاع ۳ محیط است، اگر مساحت ذوزنقه ۴۵ باشد، طول ساق آن کدام است؟

۵۵ در مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع $\sqrt{۳}$ ، طول خط المرکزین دو دایره ی محاطی داخلی و محاطی خارجی آن کدام است؟

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

۵۶ کم‌ترین و بیش‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ M تا دایره‌ای به‌ترتیب ۲ و ۱۸ واحد است. اگر بتوانیم از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم، فاصلهٔ دو نقطهٔ تماس از یکدیگر کدام است؟

۱) ۴/۸ ۲) ۵ ۳) ۹/۶ ۴) ۱۰

۵۷ فاصلهٔ دورترین نقطهٔ دایره‌ای از نقطهٔ P برابر ۹ سانتی‌متر و فاصلهٔ P تا مرکز این دایره $\frac{۱۳}{۲}$ سانتی‌متر است. طول مماس مرسوم از نقطهٔ P بر این دایره کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) ۶ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $\sqrt{۶}$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

۵۸ اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول یکی از اضلاع زاویهٔ قائمه دو برابر دیگری باشد، نسبت شعاع دایرهٔ محاطی داخلی به شعاع دایـرهٔ محـاطی خارجی متناظر با وتر کدام است؟

۱) $\frac{۳+\sqrt{۳}}{۳-\sqrt{۳}}$ ۲) $\frac{۷-۳\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) $\frac{۷+۳\sqrt{۵}}{۲}$ ۴) $\frac{۵-\sqrt{۳}}{۵+۵\sqrt{۳}}$

۵۹ در مثلث ABC اگر $\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ$ و $a^۲+b^۲+c^۲=۴۰$ باشد، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴
۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۳}$

◀ در مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع زاویه قائمه ۳ و ۴، شعاع دایرهٔ محاطی داخلی را محاسبه کنید. خرداد ۱۴۰۳ ۱/۲۵ نمره

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

جاست تست

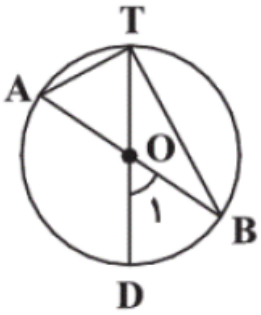
دایره – فصل ۱ هندسه یازدهم

زوایا و تعاریف و قضایای اولیه

۱ یک پنج‌ضلعی در یک دایره محاط شده است. هر ضلع این پنج‌ضلعی، وتر رو به یک زاویه محاطی است. مجموع این زوایای محاطی کدام است؟ تیر ماه ۱۴۰۲

۱) ۵۴۰° ۲) ۱۸۰° ۳) ۷۲۰° ۴) ۳۶۰°

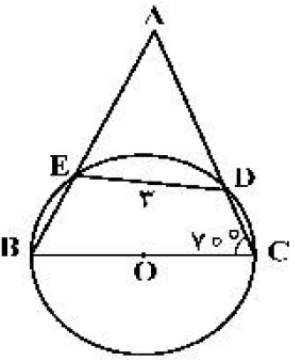
۲ در شکل مقابل، O مرکز دایره و $\hat{A} = 65^\circ$ است. اندازهٔ زاویهٔ O_1 کدام است؟



۱) 65°
۲) 60°
۳) 50°
۴) 45°

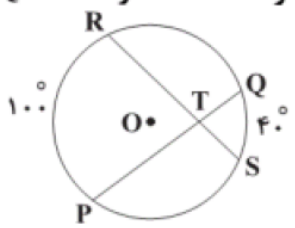
۳ در شکل زیر شعاع دایره ۳ واحد است. اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{EDC}$ به درجه، کدام است؟

سراسری ریاضی ۱۴۰۰



۱) ۸۰
۲) ۹۰
۳) ۱۰۰
۴) ۱۲۰

۴ در دایرهٔ $C(O, r)$، وترهای PQ و RS با هم برابر بوده و یکدیگر را در نقطهٔ T قطع کرده‌اند. اگر $\overset{\frown}{RP} = 100^\circ$ و $\overset{\frown}{QS} = 40^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ OTR کدام است؟

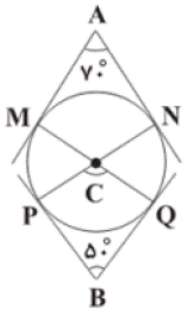


۱) 70° ۲) 35° ۳) 30° ۴) 40°

۵ دایرهٔ $C(O, 7)$ و خط ℓ به فاصلهٔ $3a+1$ از مرکز آن مفروض‌اند. اگر خط و دایره هیچ نقطهٔ تقاطعی نداشته باشند، مقدار a کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

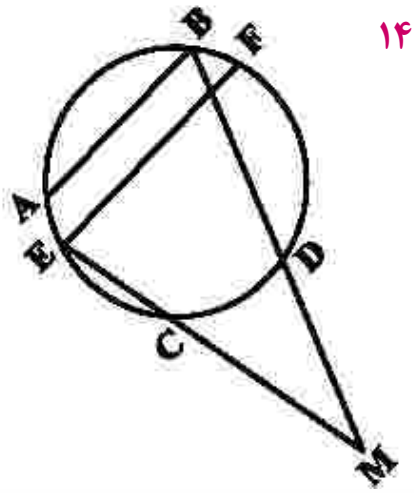
۶ در شکل روبه‌رو اضلاع زوایای A و B بر دایرهٔ مرسوم مماس هستند. در این صورت اندازهٔ زاویهٔ C کدام است؟



۱) ۱۰۰°
۲) ۱۲۰°
۳) ۸۰°
۴) ۱۴۰°

۷ در شکل زیر، $AB \parallel EF$ و اندازه کمان‌های $\overset{\frown}{AE}=15^\circ$، $\overset{\frown}{EC}=80^\circ$ و $\overset{\frown}{FD}=100^\circ$ است. اگر $B\hat{M}E=20^\circ$ باشد، اندازه زاویه $A\hat{B}D$ چند درجه است؟

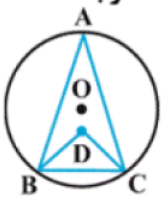
تیرماه ۱۴۰۱



۱) ۷۱/۲۵
۲) ۷۴
۳) ۷۵
۴) ۷۸/۷۵

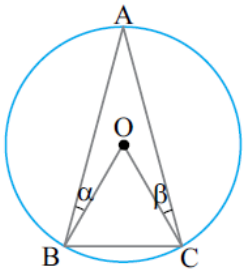
آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

۸ در شکل زیر، نقطهٔ D محل تقاطع نیمسازهای دو زاویهٔ B و C است. اگر $B\hat{D}C = ۱۰۰^\circ$، آن‌گاه کمان BC چند درجه است؟



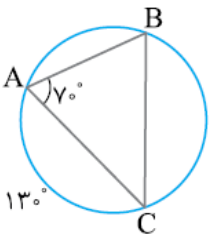
۱) ۲۰
۲) ۸۰
۳) ۶۰
۴) ۴۰

۹ در شکل مقابل مثلث OBC متساوی‌الاضلاع است. حاصل $\alpha+\beta$ کدام است؟ (O مرکز دایره)



۱) ۱۰°
۲) ۲۰°
۳) ۳۰°
۴) ۴۰°

۱۰ در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی C کدام است؟

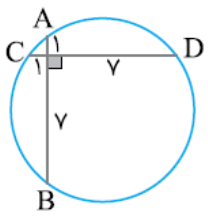


۱) ۷۰°
۲) ۶۰°
۳) ۶۵°
۴) ۴۵°

۱۱ دایره‌ی $C(O, ۴)$ و نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۱ از مرکز دایره مفروض است. چند وتر داخل دایره می‌توان رسم کرد که طول آن ۲ باشد و از M بگذرد؟

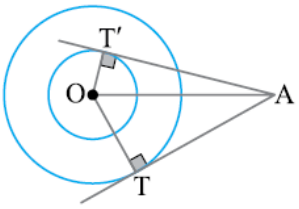
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۱۲ مطابق شکل مقابل، دو وتر AB و CD بر هم عمودند. اندازه‌ی شعاع این دایره چقدر است؟



۱) $۳\sqrt{۲}$
۲) ۵
۳) $۴\sqrt{۲}$
۴) ۶

۱۳ مطابق شکل دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۲ و ۴ مفروض‌اند. از نقطه‌ی A دو مماس بر دو دایره رسم شده است. تفاضل مربعات طول این دو مماس چقدر است؟

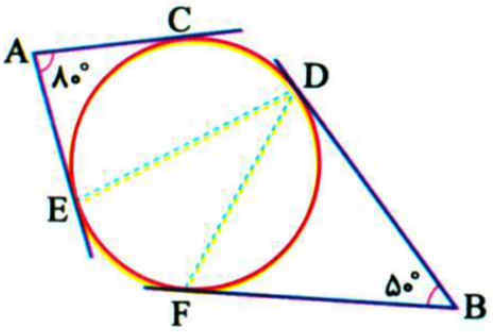


۱) ۱۰ ۲) ۱۲
۳) ۱۶ ۴) ۲۰

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

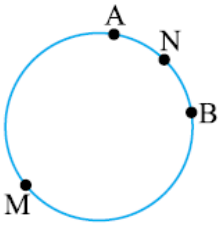
۱۴ در شکل زیر اضلاع زاویه‌های A و B بر دایره مماس‌اند، اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد، زاویهٔ $\hat{EDF}$ چند درجه است؟

خارج از کشور ۹۸



۱) ۲۵
۲) ۳۰
۳) ۳۵
۴) ۴۰

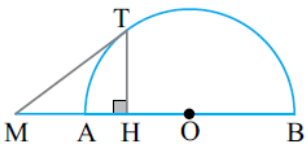
۱۵ در شکل مقابل اگر $\overset{\frown}{AMB}=۴\overset{\frown}{ANB}$، کمان ANB چه کسری از محیط دایره است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۶}$
۴) $\frac{۱}{۵}$

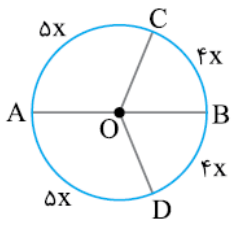
آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

۱۶ در نیم‌دایره‌ی شکل مقابل $AB=۳$ و $AM=۱$. اگر MT بر نیم‌دایره مماس باشد، طول پاره خط MH چقدر است؟



۱) ۱/۵
۲) ۱/۶
۳) ۱/۴
۴) ۱/۸

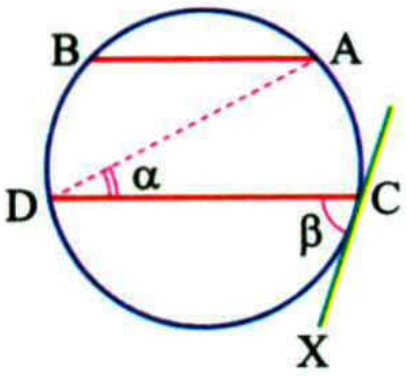
۱۷ در شکل مقابل AB قطر دایره و O مرکز آن است. اندازه‌ی زاویه‌ی COD کدام است؟



۱) ۱۶۰°
۲) ۱۵۰°
۳) ۱۴۰°
۴) ۱۳۰°

۱۸ در شکل زیر وتر AB برابر شعاع دایره و $AB \parallel CD$ و زاویهٔ $\beta = ۲\alpha$ و CX مماس بر دایره است. کمان $\overset{\frown}{BD}$ چند درجه است؟

سراسری ۹۸

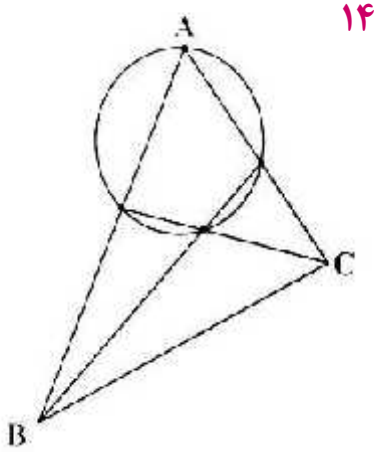


۱) ۵۰
۲) ۶۰
۳) ۷۰
۴) ۷۵

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

۱۹ در شکل زیر، نیمسازهای زاویه‌های B و C در مثلث ABC رسم شده‌اند. اگر چهارضلعی داخل دایره محاطی باشد، زاویه A چند درجه است؟

دی ماه ۱۴۰۱



۱) ۹۰
۲) ۷۵
۳) ۶۰
۴) ۴۵

۲۰ اگر کم‌ترین و بیش‌ترین فاصلهٔ نقاط دایرهٔ $C(O,r)$ تا خط d برابر ۳ و ۱۱ باشد، شعاع دایره کدام است؟

۱) ۴
۲) ۴ یا ۷
۳) ۳ یا ۸
۴) ۸

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

جاست تست

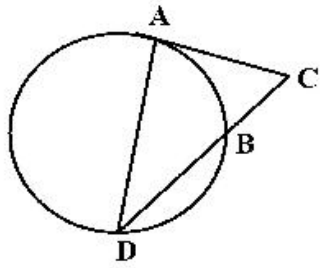
دایره – فصل ۱ هندسه یازدهم

زوایا و روابط طولی در دایره

۱ فاصلهٔ دورترین نقطهٔ دایره‌ای از نقطهٔ P برابر ۹ سانتی‌متر و فاصلهٔ P تا مرکز این دایره $\frac{۱۳}{۲}$ سانتی‌متر است. طول مماس مرسوم از نقطهٔ P بر این دایره کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) ۶ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $\sqrt{۶}$

۲ در شکل زیر پاره‌خط AC بر دایره مماس است. اگر $\frac{AC}{BC} = \sqrt{۳}$، آنگاه نسبت $\frac{DB}{BC}$، کدام است؟



۱) $\sqrt{۲}$
۲) $\sqrt{۳}$
۳) ۲
۴) ۳

سراسری ۱۴۰۰

۳ اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۴ و ۶ واحد برابر ۱۵ است. خط‌المرکزین دو دایره چند واحد است؟

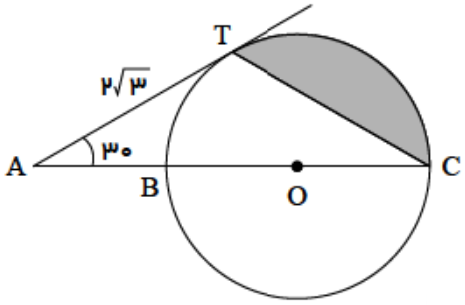
۱) $۱۲\sqrt{۲}$ ۲) ۱۸ ۳) ۱۷ ۴) $۷\sqrt{۶}$

سراسری ریاضی ۱۳۹۱

۴ کم‌ترین و بیش‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ M تا دایره‌ای به‌ترتیب ۲ و ۱۸ واحد است. اگر بتوانیم از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم، فاصلهٔ دو نقطهٔ تماس از یکدیگر کدام است؟

۱) ۴/۸ ۲) ۵ ۳) ۹/۶ ۴) ۱۰

۵ در شکل مقابل مساحت ناحیهٔ هاشورخورده چقدر است؟



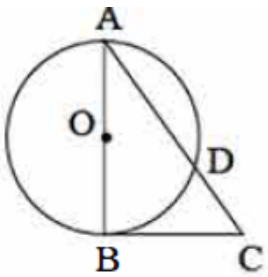
۱) $\frac{۲\pi}{۳} - \sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۴\pi}{۳} - \sqrt{۳}$

۳) $\frac{۲\pi}{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\pi - \sqrt{۳}}{۲}$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

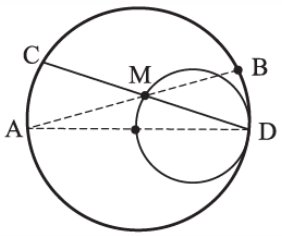
۶ در شکل روبرو پاره‌خط BC مماس بر دایره، زاویه $\widehat{C} = ۶۰^\circ$ و اندازه CD برابر $۲\sqrt{۳}$ واحد می‌باشند. مساحت دایره چقدر است؟

۱) ۳۶π
۲) ۲۴π
۳) ۱۸π
۴) ۴۰π



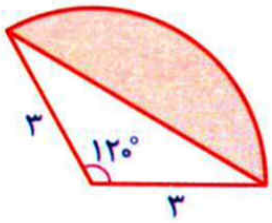
۷ در شکل روبه‌رو، دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۴ واحد، مماس داخل و اندازهٔ کمان AC برابر $\frac{۴\pi}{۳}$ است. حاصل $MA \times MB$، کدام است؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۶
۴) ۱۲



سراسری
ریاضی ۹۹

۸ مساحت قسمت رنگ شدهٔ شکل مقابل چقدر است؟



۱) $۴\pi - ۲\sqrt{۳}$

۲) $۹\pi - \frac{۸\sqrt{۳}}{۹}$

۳) $۳\pi - \frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$

۴) $۳\pi - ۲\sqrt{۳}$

۹ اگر زاویهٔ بین مماس مشترک‌های خارجی دو دایرهٔ $C(O,۱۳)$ و $C'(O',۳)$ برابر ۶۰° باشد، طول خط‌المرکزین این دو دایره چقدر است؟

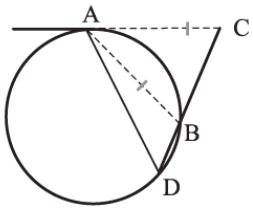
۱) ۲۰

۲) ۱۶

۳) ۱۸

۴) ۲۴

۱۰ در شکل مقابل، اندازهٔ قطعهٔ مماس AC، برابر وتر AB است. الزاماً کدام برابری درست است؟



۱) $BC = BA$

۲) $BD = AC$

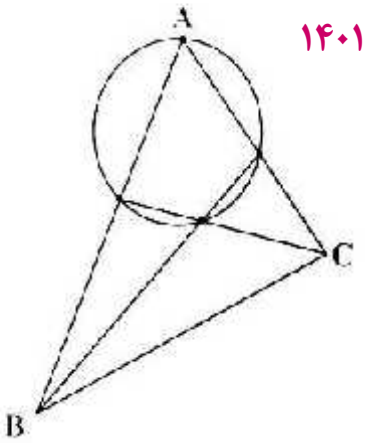
۳) $BC = BD$

۴) $DA = DC$

سراسری
ریاضی ۹۹

۱۱ در شکل زیر، نیمسازهای زاویه‌های B و C در مثلث ABC رسم شده‌اند. اگر چهارضلعی داخل دایره محاطی باشد، زاویه A چند درجه است؟

دی ماه ۱۴۰۱

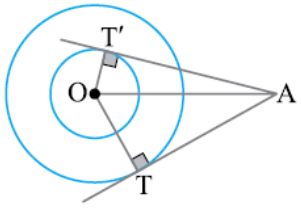


۱) ۹۰
۲) ۷۵
۳) ۶۰
۴) ۴۵

۱۲ اگر کم‌ترین و بیش‌ترین فاصلهٔ نقاط دایرهٔ $C(O,r)$ تا خط d برابر ۳ و ۱۱ باشد، شعاع دایره کدام است؟

۱) ۴
۲) ۴ یا ۷
۳) ۳ یا ۸
۴) ۸

۱۳ مطابق شکل دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۲ و ۴ مفروض‌اند. از نقطه‌ی A دو مماس بر دو دایره رسم شده است. تفاضل مربعات طول این دو مماس چقدر است؟

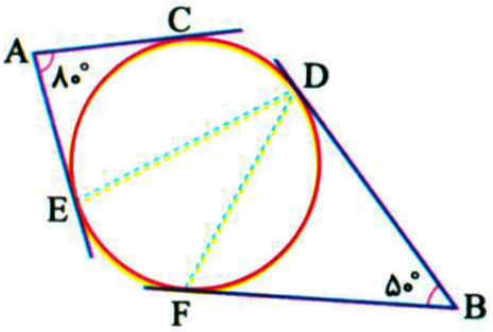


۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۲۰

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

۱۴. در شکل زیر اضلاع زاویه‌های A و B بر دایره مماس‌اند. اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد، زاویهٔ $\hat{EDF}$ چند درجه است؟

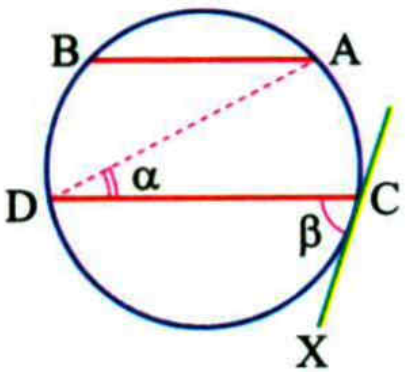
خارج از کشور ۹۸



۱) ۲۵
۲) ۳۰
۳) ۳۵
۴) ۴۰

۱۵. در شکل زیر وتر AB برابر شعاع دایره و $AB \parallel CD$ و زاویهٔ $\beta = 2\alpha$ و CX مماس بر دایره است. کمان $\overset{\frown}{BD}$ چند درجه است؟

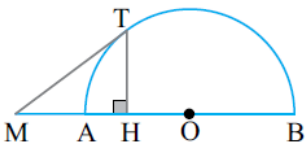
سراسری ۹۸



۱) ۵۰
۲) ۶۰
۳) ۷۰
۴) ۷۵

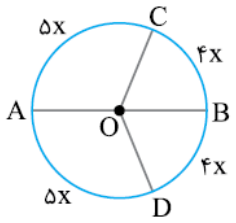
آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

۱۶ در نیم‌دایره‌ی شکل مقابل $AB=۳$ و $AM=۱$. اگر MT بر نیم‌دایره مماس باشد، طول پاره خط MH چقدر است؟



۱) ۱/۵
۲) ۱/۶
۳) ۱/۴
۴) ۱/۸

۱۷ در شکل مقابل AB قطر دایره و O مرکز آن است. اندازه‌ی زاویه‌ی COD کدام است؟



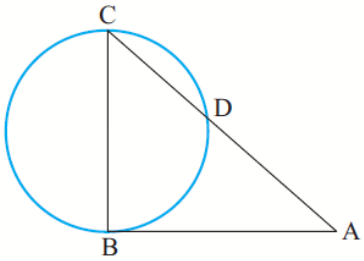
۱) ۱۶۰°
۲) ۱۵۰°
۳) ۱۴۰°
۴) ۱۳۰°

۱۸ فرض کنید خطوط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ قطرهای یک دایره و خط $۴x+۳y+۵=۰$ مماس بر آن باشد. نزدیک‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $M(۴,-۲)$ از دایره، کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}-۱$
۲) $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\sqrt{۵}-۲$

سراسری ۱۴۰۰

۹ خط AB بر دایره‌ای به قطر $BC = ۶$ مماس است. اگر $CD = ۴$، طول پاره‌خط AD کدام است؟



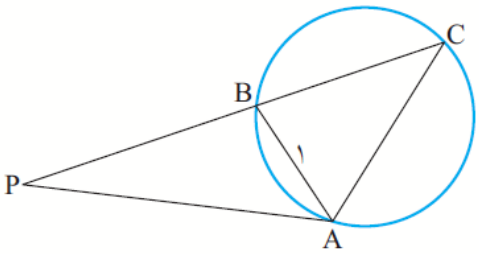
۱) ۳

۲) ۵

۳) ۷

۴) ۹

۲۰ در شکل زیر، PA مماس بر دایره است و B وسط PC است. می‌دانیم که $AB = ۱$. طول AC چقدر است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) $\sqrt{۲}$

۳) $\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}$

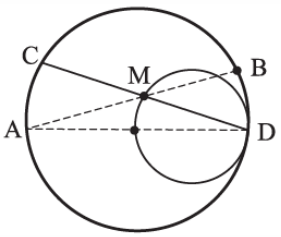
۴) ۲

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

دایره - فصل ۱ هندسه یازدهم

زوایا و روابط طولی و چند ضلعی محاطی و محیطی

۱ در شکل روبه‌رو، دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۴ واحد، مماس داخل و اندازهٔ کمان AC برابر $\frac{۴\pi}{۳}$ است. حاصل $MA \times MB$، کدام است؟



۱) ۸
۲) ۹
۳) ۶
۴) ۱۲

سراسری
ریاضی ۹۹

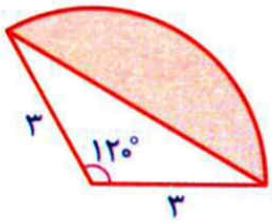
۲ فرض کنید طول خط المرکزین دو دایره با شعاع‌های $۶a - ۱$ و $a^۲ - ۲$، برابر ۶ واحد باشد. اگر دو دایره فقط یک مماس مشترک داشته باشند، میانگین مقادیر ممکن برای a، کدام است؟

۱) ۳
۲) $\frac{۱۳}{۳}$
۳) ۶
۴) ۷

سراسری ۱۴۰۰

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

۳ مساحت قسمت رنگ شدهٔ شکل مقابل چقدر است؟



۱) $۴\pi - ۲\sqrt{۳}$

۲) $۹\pi - \frac{۸\sqrt{۳}}{۹}$

۳) $۳\pi - \frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$

۴) $۳\pi - ۲\sqrt{۳}$

۴ اگر زاویهٔ بین مماس مشترک‌های خارجی دو دایرهٔ $C(O,۱۳)$ و $C'(O',۳)$ برابر ۶۰° باشد، طول خط‌المرکزین این دو دایره چقدر است؟

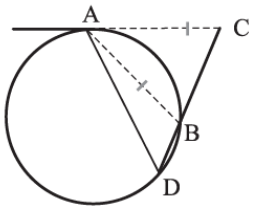
۱) ۲۰

۲) ۱۶

۳) ۱۸

۴) ۲۴

۵ در شکل مقابل، اندازهٔ قطعهٔ مماس AC، برابر وتر AB است. الزاماً کدام برابری درست است؟



۱) $BC = BA$

۲) $BD = AC$

۳) $BC = BD$

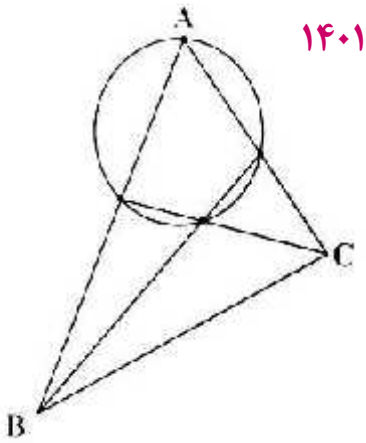
۴) $DA = DC$

سراسری
ریاضی ۹۹

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

۶ در شکل زیر، نیمسازهای زاویه‌های B و C در مثلث ABC رسم شده‌اند. اگر چهارضلعی داخل دایره محاطی باشد، زاویه A چند درجه است؟

دی ماه ۱۴۰۱

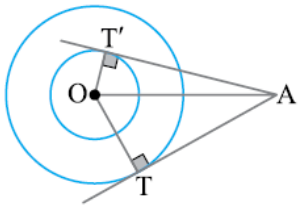


۱) ۹۰
۲) ۷۵
۳) ۶۰
۴) ۴۵

۷ اگر کم‌ترین و بیش‌ترین فاصلهٔ نقاط دایرهٔ $C(O,r)$ تا خط d برابر ۳ و ۱۱ باشد، شعاع دایره کدام است؟

۱) ۴
۲) ۴ یا ۷
۳) ۳ یا ۸
۴) ۸

۸ مطابق شکل دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۲ و ۴ مفروض‌اند. از نقطه‌ی A دو مماس بر دو دایره رسم شده است. تفاضل مربعات طول این دو مماس چقدر است؟

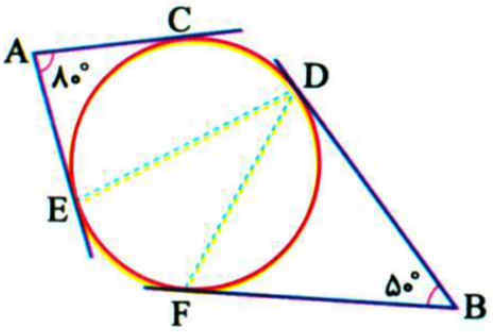


۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۲۰

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

۹ در شکل زیر اضلاع زاویه‌های A و B بر دایره مماس‌اند. اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد، زاویهٔ $\hat{EDF}$ چند درجه است؟

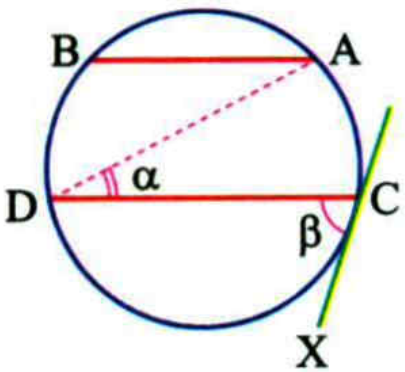
خارج از کشور ۹۸



۱) ۲۵
۲) ۳۰
۳) ۳۵
۴) ۴۰

۱۰ در شکل زیر وتر AB برابر شعاع دایره و $AB \parallel CD$ و زاویهٔ $\beta = 2\alpha$ و CX مماس بر دایره است. کمان $\overset{\frown}{BD}$ چند درجه است؟

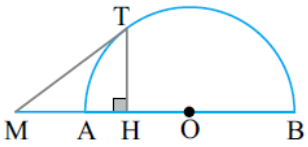
سراسری ۹۸



۱) ۵۰
۲) ۶۰
۳) ۷۰
۴) ۷۵

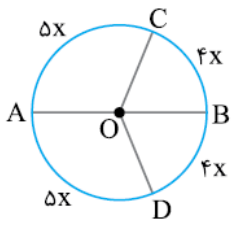
آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

۱۱ در نیم‌دایره‌ی شکل مقابل $AB=۳$ و $AM=۱$. اگر MT بر نیم‌دایره مماس باشد، طول پاره خط MH چقدر است؟



۱) ۱/۵
۲) ۱/۶
۳) ۱/۴
۴) ۱/۸

۱۲ در شکل مقابل AB قطر دایره و O مرکز آن است. اندازه‌ی زاویه‌ی COD کدام است؟



۱) ۱۶۰°
۲) ۱۵۰°
۳) ۱۴۰°
۴) ۱۳۰°

۱۳ یک ذوزنقه متساوی‌الساقین با طول قاعده‌های a و ۶ واحد، بر دایره‌ای به مساحت ۱۵π محیط است. مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۲۵}{۳}$
۲) ۸
۳) $\frac{۳۲}{۳}$
۴) ۱۰

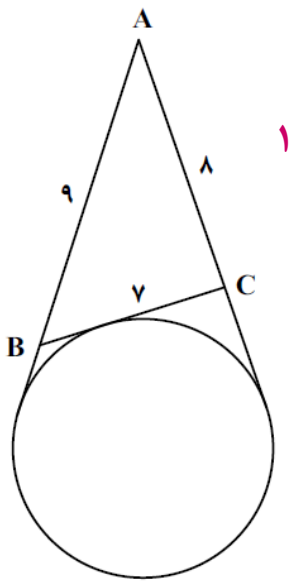
سراسری
تیرماه ۱۴۰۱

۱۴ طول خط‌المرکزین دو دایره مماس درونی ۳/۵ سانتی‌متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها 21π سانتی‌متر مربع است. شعاع دایره کوچک‌تر، چند سانتی‌متر است؟

۱) ۱/۲۵ ۲) ۱/۷۵ ۳) ۲/۲۵ ۴) ۲/۷۵

سراسری
تیرماه ۱۴۰۱

۱۵ در شکل زیر، از نقطه A دو مماس رسم شده است. شعاع دایره کدام است؟



۱) $۷/۲\sqrt{۲}$
۲) $۴/۸\sqrt{۵}$
۳) $۳/۶\sqrt{۲}$
۴) $۲/۴\sqrt{۵}$

سراسری
تیرماه ۱۴۰۲

۱۶ یک پنج‌ضلعی در یک دایره محاط شده است. هر ضلع این پنج‌ضلعی، وتر رو به یک زاویه محاطی است. مجموع این زوایای محاطی کدام است؟

۱) ۵۴۰° ۲) ۱۸۰° ۳) ۷۲۰° ۴) ۳۶۰°

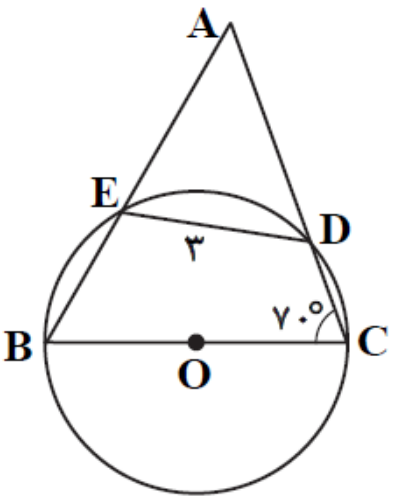
سراسری
تیرماه ۱۴۰۲

۱۷ یک دایره به شعاع ۲، داخل ذوزنقه متساوی‌الساقینی محاط شده است. اگر یکی از زوایای ذوزنقه ۶۰ درجه باشد، مساحت این ذوزنقه کدام است؟

۱) $\frac{۱۲}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\frac{۱۶}{\sqrt{۳}}$ ۳) $\frac{۲۴}{\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{۳۲}{\sqrt{۳}}$

سراسری
دی ماه ۱۴۰۱

۱۸ در شکل زیر شعاع دایره ۳ واحد است. اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{EDC}$ به درجه، کدام است؟



سراسری ۱۴۰۰

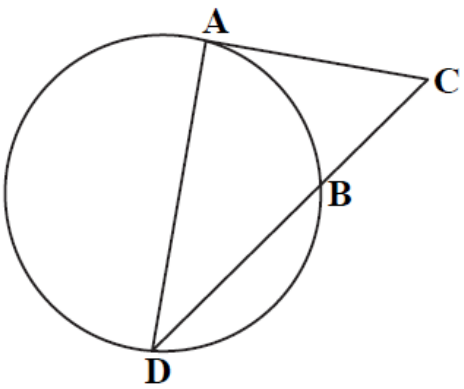
۱) ۸۰

۲) ۹۰

۳) ۱۰۰

۴) ۱۲۰

۱۹ در شکل زیر پاره‌خط AC بر دایره مماس است. اگر $\frac{AC}{BC} = \sqrt{۳}$، آنگاه نسبت $\frac{DB}{BC}$ کدام است؟



سراسری ۱۴۰۰

۱) $\sqrt{۲}$

۲) $\sqrt{۳}$

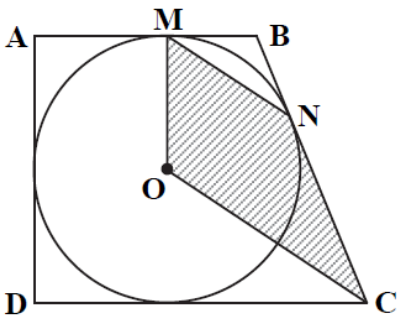
۳) ۲

۴) ۳

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

۲۰ مطابق شکل زیر ذوزنقه قائم‌الزاویه **ABCD** بر دایره‌ای به شعاع ۳، محیط شده است.

اگر زاویهٔ $M\hat{B}N = ۱۲۰^\circ$ باشد، مساحت چهارضلعی **OMNC** کدام است؟



سراسری ۱۴۰۰

۱) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$

۲) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$

۴) $۹\sqrt{۳}$

نام و نام خانوادگی :

عنوان آزمون : آزمون اول هندسه یازدهم -زوایا و روابط طولی در دایره

پایه تحصیلی :

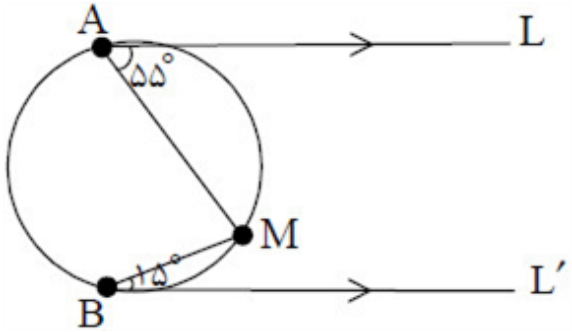
زمان آزمون :

نام دبیر : رها مسیح

تاریخ برگزاری

کارنامه خرد

۱ در شکل مقابل $L \parallel L'$ و شعاع دایره برابر ۳۰ واحد است. با فرض $\pi = ۳$، طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ کدام است؟

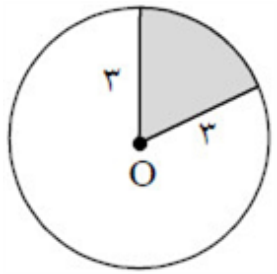


۱) ۷۰ ۲) ۷۵ ۳) ۶۰ ۴) ۶۵

۲ در دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ طول مماس مشترک خارجی ۱۲ و طول مماس مشترک داخلی $۲\sqrt{۱۵}$ و اندازهٔ خط المرکزین $۴\sqrt{۱۰}$ است. اختلاف مساحت دو دایره C و C'، کدام است؟

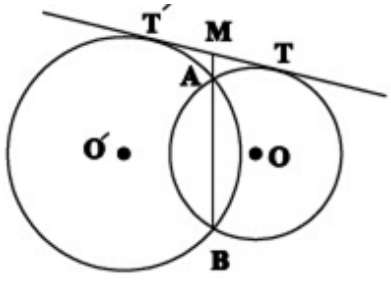
۱) ۲۰π ۲) ۳۰π ۳) ۴۰π ۴) ۵۰π

۳ اگر مساحت قسمت سایه خورده برابر $\frac{\pi}{۲}$ باشد، محیط قسمت سایه‌خورده کدام است؟ (در محاسبه نهایی محیط π را ۳ فرض کنید.)



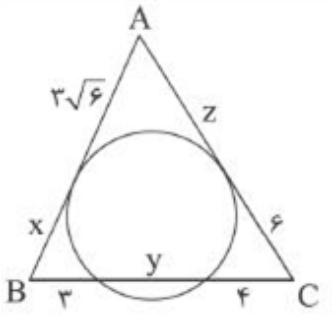
۱) ۷/۵ ۲) ۱۰/۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۴ در شکل مقابل فاصلهٔ مراکز دو دایرهٔ متقاطع برابر $OO' = ۹$ است. وتر مشترک $AB = ۵$ را امتداد می‌دهیم تا مماس مشترک خارجی TT' را در نقطهٔ M قطع کند. اگر $AM = ۲$ باشد، اختلاف اندازهٔ شعاع‌های دو دایره کدام است؟



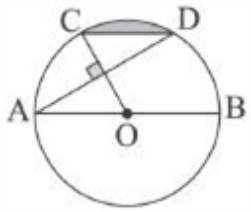
۱) ۳ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) ۵ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۵ در دایرهٔ شکل زیر، دو ضلع AB و AC از مثلث ABC بر دایره مماس‌اند. حاصل $x+y+z$ برابر کدام است؟



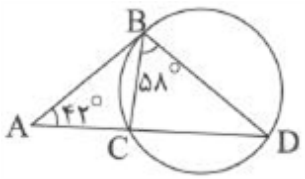
۱) $۵+۵\sqrt{۶}$ ۲) $۵\sqrt{۶}$ ۳) $۸\sqrt{۶}$ ۴) $۵+۸\sqrt{۶}$

۶ در دایره به مرکز O و شعاع ۶، دو وتر AB و CD موازی‌اند. مساحت قطعهٔ رنگ‌شده برابر کدام است؟



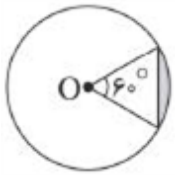
۱) $۸\pi-۴\sqrt{۳}$ ۲) $۸\pi-۸\sqrt{۳}$ ۳) $۶\pi-۶\sqrt{۳}$ ۴) $۶\pi-۹\sqrt{۳}$

۷ در شکل زیر اندازهٔ زاویهٔ ظلی $A\hat{B}C$ برابر کدام است؟



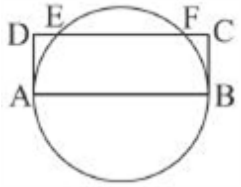
۱) ۴۰° ۲) ۳۶° ۳) ۲۱° ۴) ۲۹°

۸ در شکل زیر مساحت قطعهٔ رنگی برابر $\frac{۲\pi}{۳}-\sqrt{۳}$ است. مساحت دایره کدام است؟



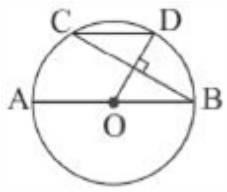
۱) ۹π ۲) ۶π ۳) ۴π ۴) π

۹ در شکل زیر چهارضلعی ABCD مستطیلی به ابعاد ۱۲ و ۲۵ واحد و AB قطر دایره است. طول وتر EF کدام است؟



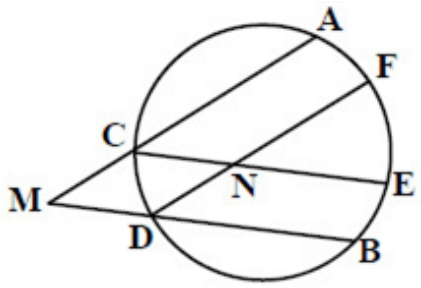
۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۰) در دایرهٔ $C(O, ۳)$، $CD \parallel AB$ است. طول کمان $\overset{\frown}{CD}$ کدام است؟



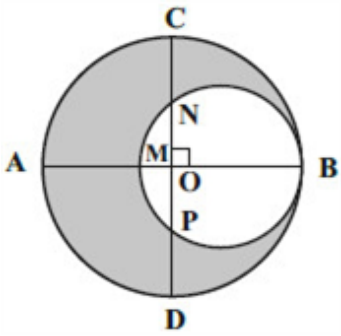
۱) ۲π ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) π

۱۱) در شکل مقابل، $AC \parallel DF$، $BD \parallel CE$، $\overset{\frown}{AC} = ۸۵^\circ$ و $\overset{\frown}{BD} = ۷۵^\circ$ است. اگر $C\widehat{N}F = ۱۳۵^\circ$ باشد، اندازه کمان $\overset{\frown}{EF}$ چند درجه است؟



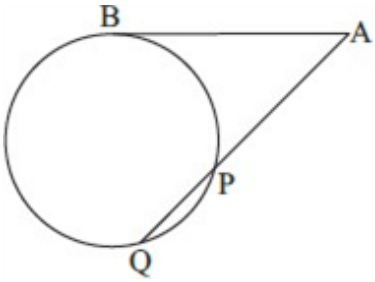
۱) ۴۵ ۲) ۴۰ ۳) ۳۵ ۴) ۳۰

۱۲) در شکل مقابل، دو دایره در نقطهٔ B بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایرهٔ بزرگ‌تر بر هم عمودند. اگر $AM = ۸$ و $CN = ۶$ باشد، مساحت ناحیهٔ سایه زده کدام است؟



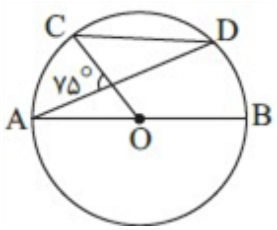
۱) ۵۴π ۲) ۵۶π ۳) ۶۴π ۴) ۶۶π

۱۳) در دایره‌ی $C(O, ۵)$ پاره‌خط AB در نقطه‌ی B بر دایره مماس است. اگر $AB = ۶$ و $AP = ۴$ باشند، آنگاه طول کمان $\overset{\frown}{PQ}$ برابر کدام است؟



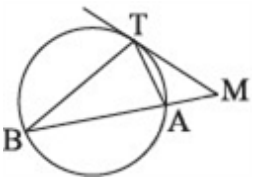
۱) $\frac{۵}{۳}\pi$ ۲) $\frac{۴}{۳}\pi$ ۳) $\frac{۶}{۵}\pi$ ۴) $\frac{۵}{۶}\pi$

۱۴) در شکل مقابل وتر CD با قطر AB موازی است. زاویه‌ی $\widehat{DBA}$ چند درجه است؟



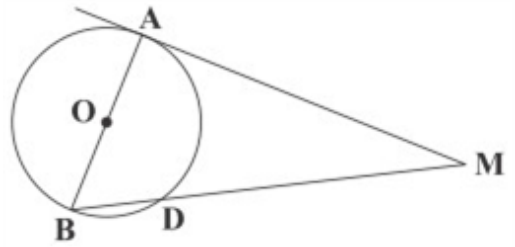
۱) ۲۵ ۲) ۵۰ ۳) ۶۵ ۴) ۶۰

۱۵) در شکل، MT بر دایره مماس است. اگر $AT = ۲$ ، $BT = ۴$ و $MA = ۱/۵$ باشند، آنگاه اندازه‌ی AB کدام است؟



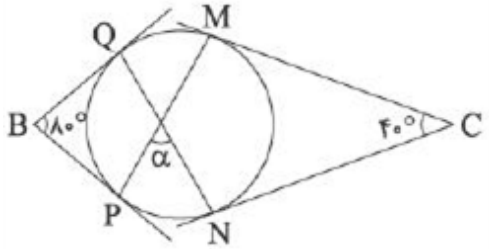
۱) ۵/۵ ۲) ۵ ۳) ۴/۵ ۴) ۴

۱۶) در شکل مقابل، O مرکز دایره و شعاع آن ۴ واحد است. اگر $BD = ۴$ باشد، طول مماس MA کدام است؟



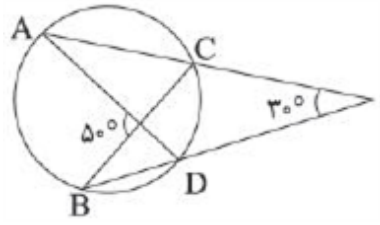
۱) $۸\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $۱۶\sqrt{۳}$

۱۷) در شکل زیر اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس هستند. اندازهٔ زاویهٔ α چند درجه است؟



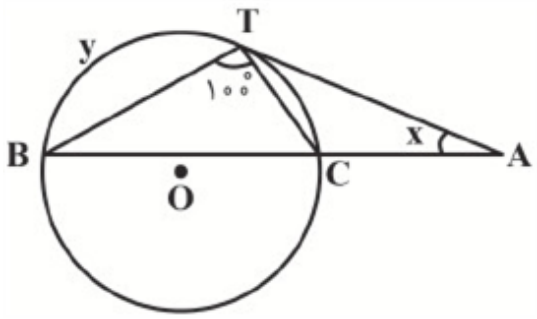
۱) ۴۵° ۲) ۶۰° ۳) ۵۰° ۴) ۳۰°

۱۸) در دایرهٔ $C(O, ۶)$، طول کمان AB برابر کدام است؟



۱) ۶π ۲) $\frac{۳}{۲}\pi$ ۳) $\frac{۸}{۳}\pi$ ۴) ۳π

۱۹) در شکل مقابل، $\widehat{A} = x$ و $\overset{\frown}{\mathrm{BT}} = y$ است. اگر $\widehat{B} = ۲\widehat{A}$ و AT در نقطه‌ی T بر دایره مماس باشد، حاصل $y - x$ کدام است؟

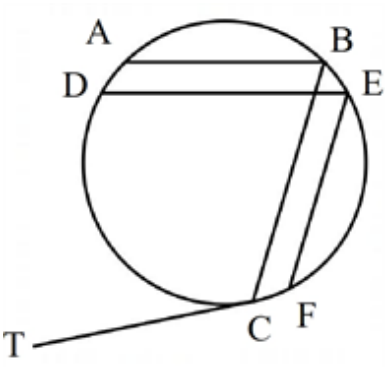


۱) ۵۰° ۲) ۶۰° ۳) ۹۰° ۴) ۸۰°

۲۰) در دایره‌ای به قطر AB، وتر AC با قطر AB زاویه‌ی ۶۴° می‌سازد. نقطه‌ی D را روی کمان BC طوری انتخاب می‌کنیم که $\mathrm{AC} = \mathrm{CD}$، زاویه‌ی BAD چند درجه است؟

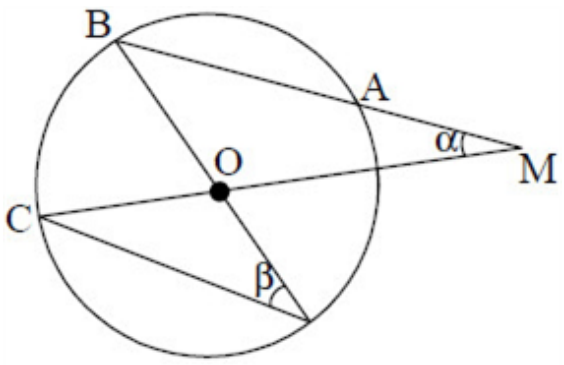
۱) ۳۸ ۲) ۳۷ ۳) ۳۶ ۴) ۳۵

۲۱) در شکل مقابل، $\mathrm{AB} \parallel \mathrm{DE}$ و $\mathrm{BC} \parallel \mathrm{EF}$ است. اگر $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = ۶۰^\circ$، $\overset{\frown}{\mathrm{CD}} = ۱۰۰^\circ$ و $\overset{\frown}{\mathrm{EF}} = ۸۰^\circ$ باشد، اندازه $B\widehat{C}T$ چند درجه است؟



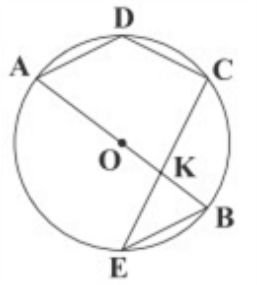
۱) ۹۰ ۲) ۹۵ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۱۰

۲۲) از نقطه‌ی M خارج دایره $C(O, R)$، خطی چنان رسم شده است که دایره را در نقاط A و B قطع کرده و $\mathrm{MA} = R$ است. اگر $\alpha = ۲۲^\circ$ باشد، اندازه‌ی زاویه β کدام است؟



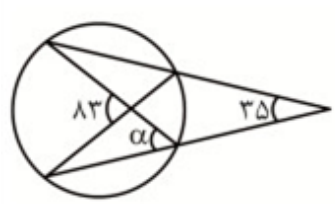
۱) ۳۳° ۲) ۳۰° ۳) ۲۷° ۴) ۲۲°

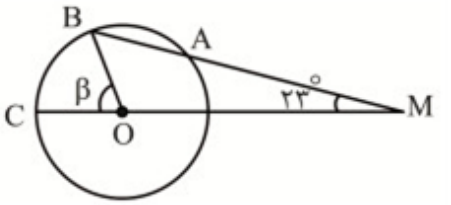
۲۳ در شکل زیر O مرکز و AB قطر دایره و $AD = DC = BE$ می‌باشد. اگر $\overset{\frown}{AKE} = ۷۵^\circ$ باشد، زاویه‌ی ADC چند درجه است؟



۱) ۱۱۰ ۲) ۱۱۵ ۳) ۱۰۵ ۴) ۱۰۰

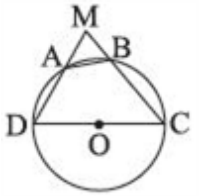
۲۴ با فرض $MA = R$ (R شعاع دایره) در شکل‌های زیر، اندازه $\alpha + \beta$ کدام است؟





۱) ۱۱۸ ۲) ۱۲۸ ۳) ۱۲۴ ۴) ۱۳۲

۲۵ در شکل زیر O مرکز دایره است و $CD = ۲AD$. اگر $B\widehat{C}D = ۵۰^\circ$ باشد، زاویهٔ M چند درجه است؟



۱) ۴۵° ۲) ۵۰° ۳) ۶۰° ۴) ۷۰°

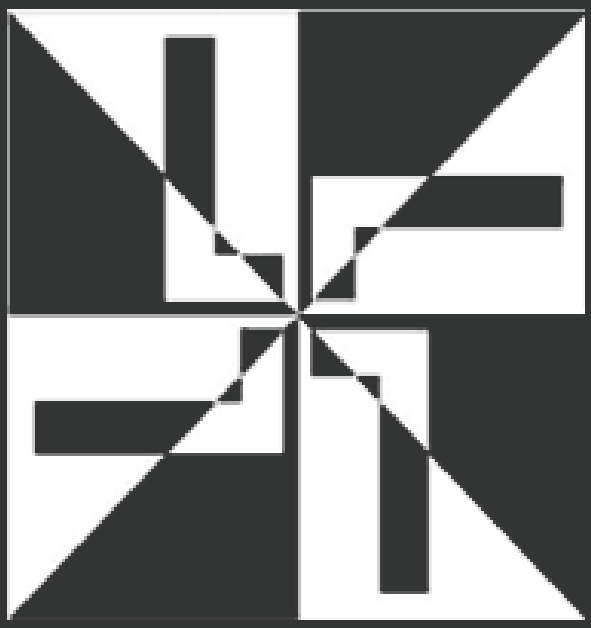
پاسخنامه کلیدی

۱	**۱**	۲	۳	۴
۲	۱	۲	**۳**	۴
۳	۱	۲	۳	**۴**
۴	۱	۲	**۳**	۴
۵	**۱**	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	**۴**
۷	**۱**	۲	۳	۴
۸	۱	۲	**۳**	۴
۹	۱	**۲**	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	**۴**
۱۱	۱	۲	**۳**	۴
۱۲	۱	**۲**	۳	۴
۱۳	**۱**	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	**۳**	۴
۱۵	۱	۲	**۳**	۴
۱۶	**۱**	۲	۳	۴
۱۷	۱	**۲**	۳	۴
۱۸	۱	۲	**۳**	۴
۱۹	۱	۲	۳	**۴**
۲۰	**۱**	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	**۳**	۴
۲۲	**۱**	۲	۳	۴
۲۳	**۱**	۲	۳	۴
۲۴	۱	**۲**	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	**۴**

دکتر رها مسیح

کارنامه خرد

تبدیلات هندسی



فصل دو هندسه یازدهم

انتقال، بازتاب، دوران و تجانس

نمره در امتحان نهایی

شش نمره

تعداد تست

یک تست

پیش نیاز

تبدیلات هفتم

$F(x)=y$ (x: ورودی، y: خروجی)

$F(x,y)=(x',y')$

تبدیل هندسی

رابطه‌ای است که به هر نقطه از صفحه یک نقطه را تعیین می‌کند (تصویر)

و هر نقطه تصویر دقیقاً از یکی از نقاط بدست آمده است.

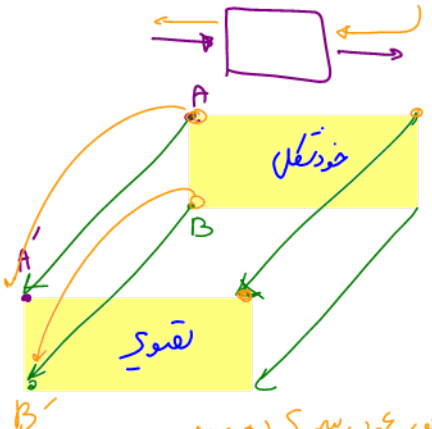
دقیقاً به

انتقال

بردار انتقال $\vec{v}$

$\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$ ، $T(A)=A'$

بردار را روی هر نقطه به تصویرش.





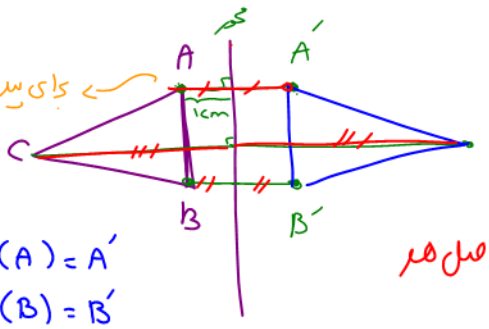


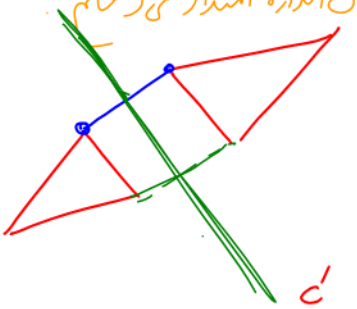
بازتاب

$S(A)=A'$

محور بازتاب = عمود منصف پاره خط واصل هر نقطه و تصویرش

برای پیدا کردن تصویر به محور عمود رسم کرده و به همان اندازه امتداد می‌دهیم





$T(A)=A'$
$T(B)=B'$
$T(C)=C'$

دوران

$R(A)=A'$

مرکز دوران

$|OA| = |OA'|$

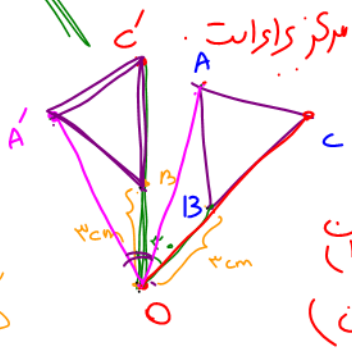
فاصله نقطه تا مرکز و تصویرش تا مرکز برابر است.

زاویه دوران

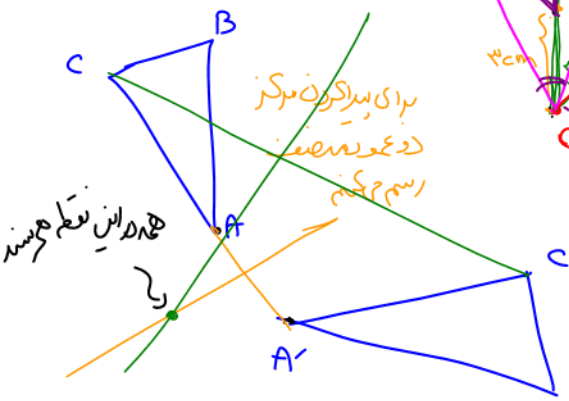
$A\hat{O}A' = \alpha$

α ← زاویه بین نیم خط (واصل و مرکز دوران) و (تصویر و مرکز دوران)

جهت ← ساعتگرد / پادساعتگرد



۳۰° پادساعتگرد نسبت به O



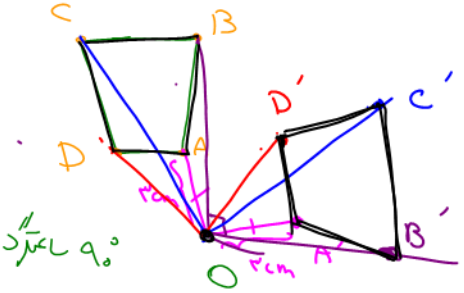
برای پیدا کردن مرکز دو عمود منصف رسم می‌کنیم

همه این نقاط هم‌اند

مرکز دوران روی عمود منصف پاره خط واصل هر نقطه و تصویرش قرار دارد.

$T(A)=A'$

تبدیل T نقطه A را به نقطه A' تغییر کرده است.



تجانس

از جنس هم ولی به اندازه مختلف

مرکز تجانس O

$K>0$ مستقیم ← A و A' در یک سمت O

$K<0$ معکوس ← O بین A و A'

نسبت تجانس K

$\frac{|OA'|}{|OA|} = K$

$\frac{|A'B'|}{|AB|} = |K|$ ← اندازه بهم!

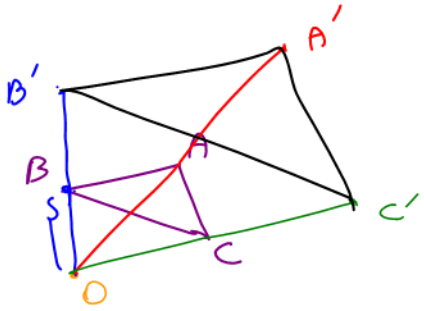
$|K|<1$ انقباض

$|K|>1$ انبساط

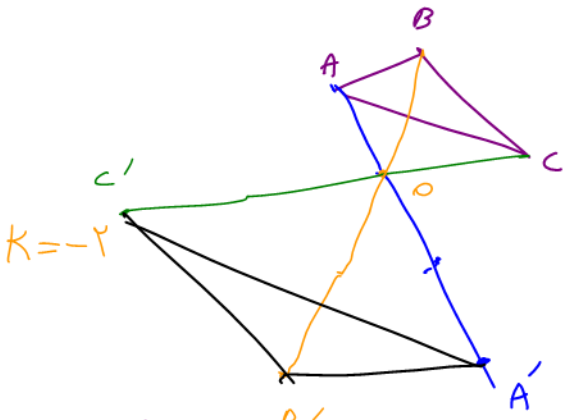
$|K|=1$ طولپا

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

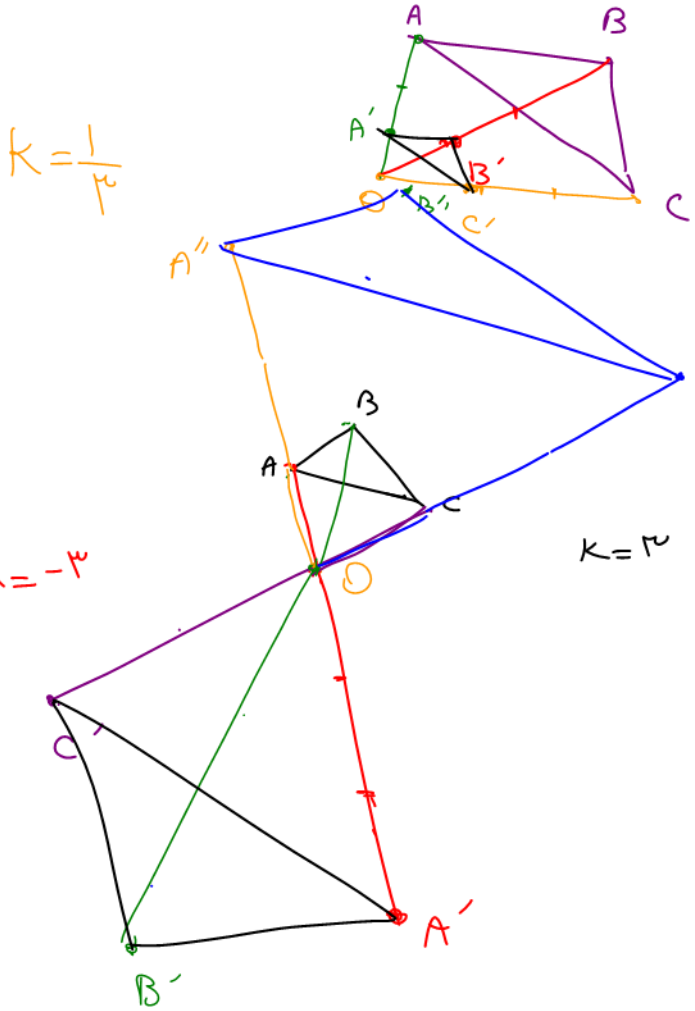
تجانس مستقیم



$k = 2$



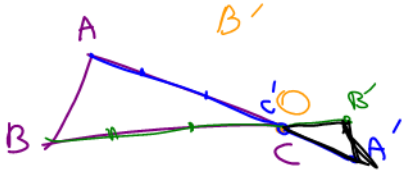
$k = -2$



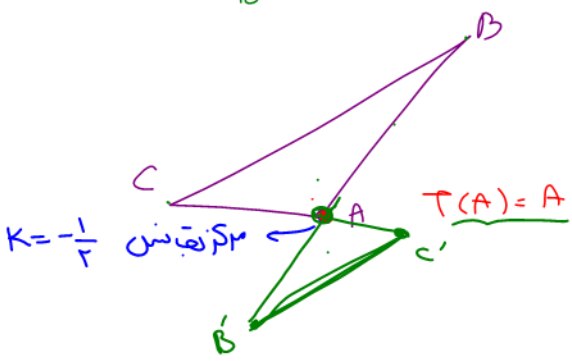
$k = \frac{1}{2}$

$k = 3$

$k = -3$



$k = -\frac{1}{2}$



$k = -\frac{1}{2}$ تجانس مرکز

$T(A) = A$

دکتر رها مسیح

هر رابطه‌ای می‌تونه باشه!

$f(x,y) = (x+y, x-3y)$

$f(1,2) = (1+2, 1-3\times2) = (3,-5)$

تحت تبدیل f خط $y=2x-1$ به چه خطی تبدیل می‌شود؟

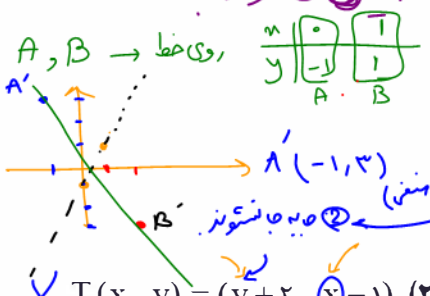
$A(0,0)$

$f(A) = A'$

$A'(3,-5)$

$f(0,-1) = (0+(-1), 0-3(-1)) = (-1,3)$

$f(1,1) = (1+1, 1-3(1)) = (2,-2)$



۱ کدام یک از تبدیل‌های زیر یک انتقال است؟

۱) $T(x,y) = (x+1, 1-y)$ ✗ ✗

۲) $T(x,y) = (y+2, x-1)$ ✗

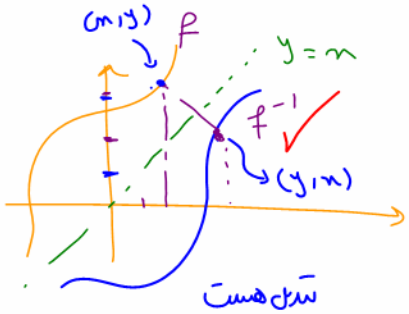
۳) $T(x,y) = (2x+1, 1+y)$ ✗

۴) $T(x,y) = (\frac{2x+1}{2}, \frac{3y+5}{3})$ ✓

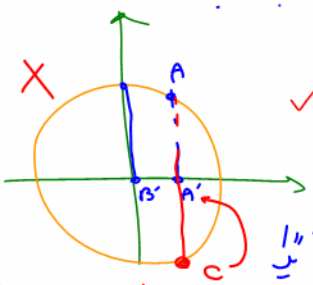
$(x+\frac{1}{2}, y+\frac{5}{3})$ ✓ $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{5}{3}\end{bmatrix}$

ضابطه $f(x) = 2x$

$f(x) = \frac{3x-1}{x^2}$

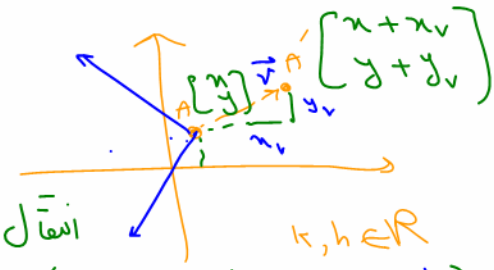


تبدیل هست چون هر نقطه یک تصویر و هر تصویر متعلق به یک نقطه



هر نقطه دقیقاً یک تصویر دارد ولی هر تصویر لزوماً متعلق به یک نقطه نیست

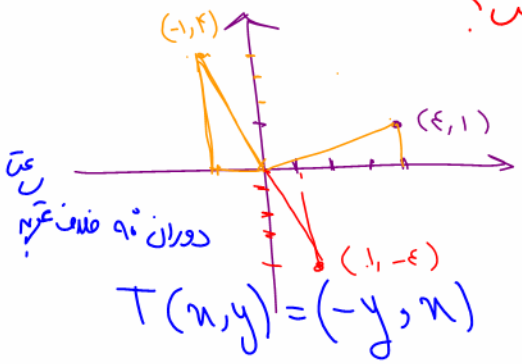
هر نقطه را به نقطه‌ای با طول یک‌سوم روی محور xها نظیر کنید. آیا این یک تبدیل است؟



$k, h \in \mathbb{R}$

$T(x,y) = (x+k, y+h)$

۲ تصویر خط $2x-3y=1$ را تحت تبدیل $T(x,y) = (1-y, 2x+2)$ به‌دست آورید.



$T(x,y) = (-y, x)$

$R(x,y) = (y, -x)$

	A	B
x	2	-1
y	1	-1

① دو نقطه روی خط بدست آورید.

$T(-1,-1) = (1-(-1), 2(-1)+2)$

$\Rightarrow T(-1,1) = (2,0)$

② تصویر دو نقطه را بدست آورید

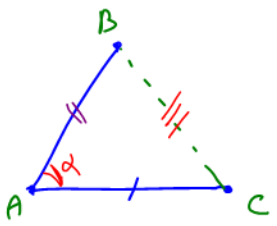
$T(2,1) = (1-1, 2(2)+2) = (0,6)$ ← عرض از مبدا

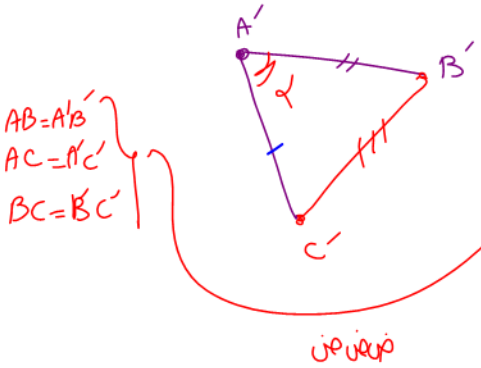
③ معادله خط جدید را بدست آورید.

$\text{شیب} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-0}{0-2} = \frac{6}{-2} = -3$

$y = -3x + 6$

ثابت کنید در یک تبدیل طول پاره‌خط، اندازه زاویه نیز حفظ می‌شود.



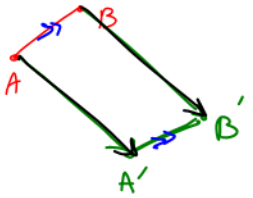


$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C \longrightarrow A=A',\ B=B',\ C=C'$

$\longrightarrow S=S'$ / $P=P'$ (به شرط $2P=2P'$)

---

* ثابت کنید انتقال ایزومتریک است و بنابراین طول را حفظ می‌کند.



$T(A)=A'$
$T(B)=B'$

$\vec{AA'} \parallel \vec{v}$, $\vec{BB'} \parallel \vec{v}$ $\longrightarrow \vec{AA'} \parallel \vec{BB'}$ $\longrightarrow$ $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع

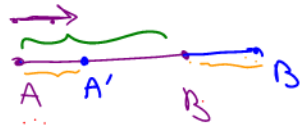
(انتقال بنابراهمط می‌کند) $AB \parallel A'B'$

(انتقال طول‌پاست) $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$

(1) $v \not\parallel AB$ حالت اول

(2) $v \parallel AB$

$|v| < |AB|$



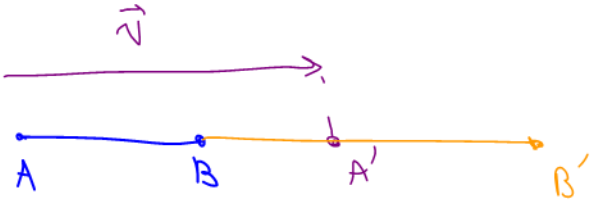
$|\vec{AA'}| = |\vec{v}|$
$|\vec{BB'}| = |\vec{v}|$ $\longrightarrow |AA'| = |BB'|$

$|AB| - |A'B| = |A'B'| - |A'B|$

$|AB| = |A'B'|$ طول‌پاست.

$AB \parallel A'B' \Leftarrow AB \parallel AB$, $v \parallel A'B'$ درست است.

$|v| > |AB|$



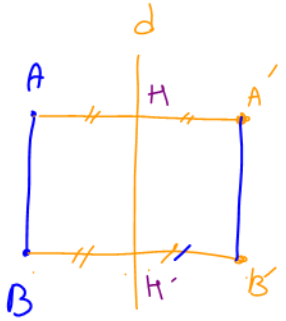
$|AA'| = |\vec{v}|$
$|BB'| = |\vec{v}|$ $\Rightarrow |AA'| = |BB'|$

$|AB| + |A'B| = |A'B'| + |A'B|$

$|AB| = |A'B'|$

ثابت کنید بازتاب طولپاست

1) $AB \parallel d$



$T(A) = A'$

$T(B) = B'$

$d \perp AA'$, $d \perp BB'$ $\rightarrow AA' \parallel BB'$

$\rightarrow AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع

$AB \parallel A'B'$

تعریف بازتاب $\leftarrow AH = A'H$

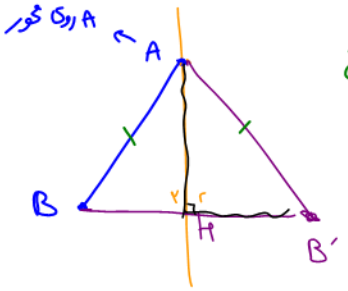
دوخط موازی $\leftarrow AH = BH'$

تعریف بازتاب $\leftarrow BH' = B'H'$

$\rightarrow AA' = BB'$

طولپاست $\leftarrow |AB| = |A'B'|$

2)



$T(A) = A$ نقطه‌ثابت

$T(B) = B'$

تعریف بازتاب $\rightarrow BH = B'H$

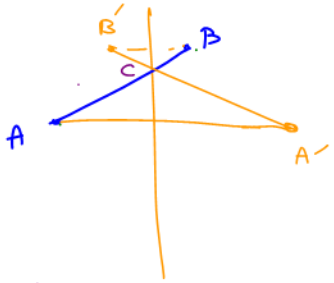
$AH = AH$

$H_1 = H_2 = 90^\circ$

ض‌زض $\rightarrow \triangle AHB \cong \triangle AHB'$

$\rightarrow AB = AB'$ طول

3) دو سر پاره‌خط روی محور



$T(A) = A'$

$T(B) = B'$

$T(C) = C$

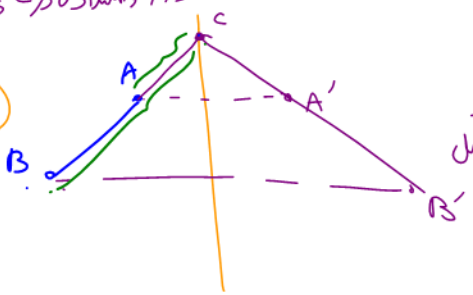
طبق اثبات ② $\rightarrow |CB| = |CB'|$

$\rightarrow |CA| = |CA'|$

$|CA| + |CB| = |CA'| + |CB'|$

$|AB| = |A'B'|$

4) AB را دلخواه در C مورب قطع کند و یک سر پاره‌خط روی محور



طبق اثبات قبل $\rightarrow |CB| = |CB'|$

$|CA| = |CA'|$

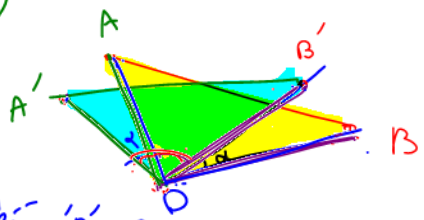
$|CB| - |CA| = |CB'| - |CA'|$

$|AB| = |A'B'|$

"دوران ایزومتریک (طولپا) است."

$\hat{AOB} = \hat{A'OB'} + \alpha$
$\hat{A'OB'} = \alpha + \hat{AOB'}$
$\} \rightarrow \hat{AOB} = \hat{A'OB'}$

1)



متقاطع AB', AB

$T(A) = A' \longrightarrow OA = OA'$
$\hat{AOA'} = \alpha \rightarrow +\hat{AOB'}$

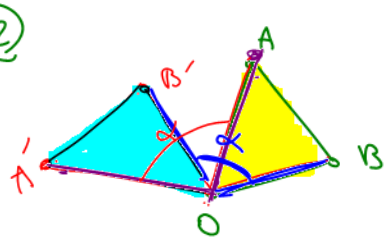
$T(B) = B' \longrightarrow OB = OB'$
$\hat{BOB'} = \alpha \xrightarrow{\hat{AOB'}} \hat{AOB'} + \hat{BOB'} = \hat{AOB}$

$\hat{AOB} + \hat{AOA'} = \hat{A'OB'}$ (یکدیگر) , $\hat{AOA'} = \alpha$

$\Rightarrow \hat{A'OB'} = \hat{AOB}$

$OA = OA'$
$OB = OB'$
$\hat{AOB} = \hat{A'OB'}$
$\xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle AOB \cong \triangle A'OB' \rightarrow AB = A'B'$

2)

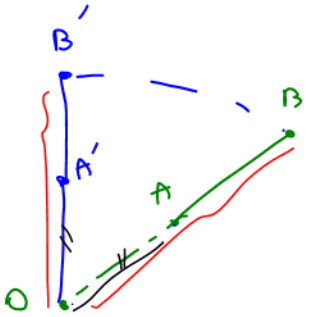


$T(A) = A' \longrightarrow OA = OA'$
$\hat{AOA'} = \alpha$

$T(B) = B' \longrightarrow OB = OB'$
$\hat{BOB'} = \alpha$

$\hat{AOB} = \alpha - \hat{B'OA}$
$\hat{A'OB'} = \alpha - \hat{B'OA}$
$\Rightarrow \hat{AOB} = \hat{A'OB'}$
$OA = OA'$
$OB = OB'$
$\xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle OAB \cong \triangle OA'B' \rightarrow \overline{AB} = \overline{A'B'}$

3) O در استاد AB



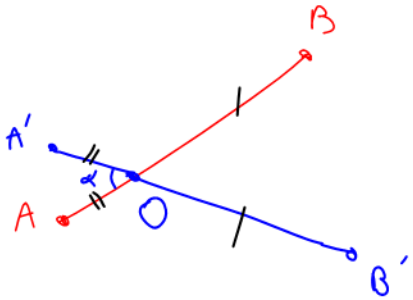
$T(A) = A' \longrightarrow OA' = OA$
$\hat{AOA'} = \alpha$

$T(B) = B' \longrightarrow OB' = OB$
$\hat{BOB'} = \alpha$

$OB - OA = OB' - OA'$
$AB = A'B'$

O روی AB نباشد

4)



$T(A) = A' \longrightarrow OA = OA'$
$T(B) = B' \longrightarrow OB = OB'$ (+)

$OA + OB = OA' + OB'$
$AB = A'B'$

نقطه ثابت

نقطه‌ای که تصویر خودش منطبق است. $T(A)=A$

انتقال بردار $\vec{v}$

$\overrightarrow{AA'}=\vec{v}$

نقطه ثابت ندارد.

ایزومتری = طول‌پایی

حفظ طول پاره‌خط ← محیط، مساحت و زاویه حفظ

$|AB|=|A'B'|$

ایزومتری است!

- دوری: $\vec{v}\parallel AB$
- دورانی: $\vec{v}\not\parallel AB$
- $|\vec{v}|<|AB|$
- $|\vec{v}|>|AB|$
- $\vec{v}\not\parallel AB$

متقارن الضلاع

حفظ شیب

$AB\parallel A'B'$

شیب را حفظ می‌کند!

- برابری: $\vec{v}\parallel AB$
- دورانی: $\vec{v}\not\parallel AB$

متوازی الاضلاع

بازتاب

A — H — A'

بی‌شمار نقطه ثابت دارد

نقاط روی محور بازتاب

$\overline{AH}=\overline{HA'}$

$AA'\perp d$

بازتاب ایزومتریک است

1. موازی محور بازتاب
2. یک نقطه روی محور ← هم‌شکل
3. دو نقطه دو طرف محور
4. دو نقطه یک طرف محور

با تک ② حل می‌شوند

بازتاب شیب را لزوماً حفظ نمی‌کند

مگر خطوط موازی و عمود

خط بی‌تصویر منطبق بر خود

دوران

O، A، A'، α

$OA=OA'$

هر دوران نقطه ثابت یکتا

یک نقطه ثابت دارد.

ایزومتریک است

- AB، $A'B'$ متقاطع: O در امتداد AB نیست
- AB، $A'B'$ غیرمتقاطع
- O در امتداد AB
- O روی AB

دوران شیب را لزوماً حفظ نمی‌کند

مگر $\alpha=180k$

$k\in\mathbb{Z}$

تجانس

A'، B، A، O، A''، A'''، $k>0$، $k<0$

$\frac{|OA'|}{|OA|}=k$

$|OA'|=|k||OA|$

یک نقطه ثابت دارد = مرکز تجانس

فقط و فقط در صورتی

طولپایی است که $|k|=1$

$k=\pm 1$

قرینه نسبت به نقطه دوران ۱۸۰ است

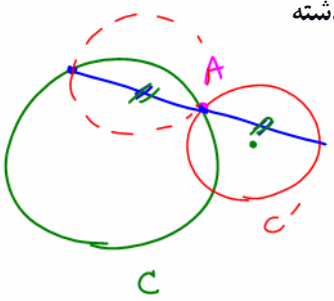
تجانس شیب را در هر صورت حفظ می‌کند.

۵	سه خط دوبه‌دو ناموازی L_1 و L_2 و L_3 داریم. توضیح دهید که چگونه می‌توان پاره‌خطی به طول ۵ واحد رسم کرد که دو سر آن روی L_1 و L_2 باشند و موازی L_3 باشد.	۲
۶	یک مربع را در تجانسی با نسبت تجانس $\frac{۲}{۳}$ و به مرکز محل تلاقی قطرها تصویر کرده‌ایم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۵ واحد باشد، محیط مربع اولیه را محاسبه کنید.	۲
۷	نقطه B تصویر نقطه A در بازتاب نسبت به خط L است. اگر $AB=۱۶$ و نقطه O روی خط L باشد و $OA=۱۰$، فاصله نقطه A از خط OB را بیابید.	۱/۵
۸	فقط درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید: الف) تجانس همواره اندازه زاویه را حفظ می‌کند. ب) بازتاب همواره شیب خط را حفظ می‌کند.	۱

حل شد GeoGebra

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

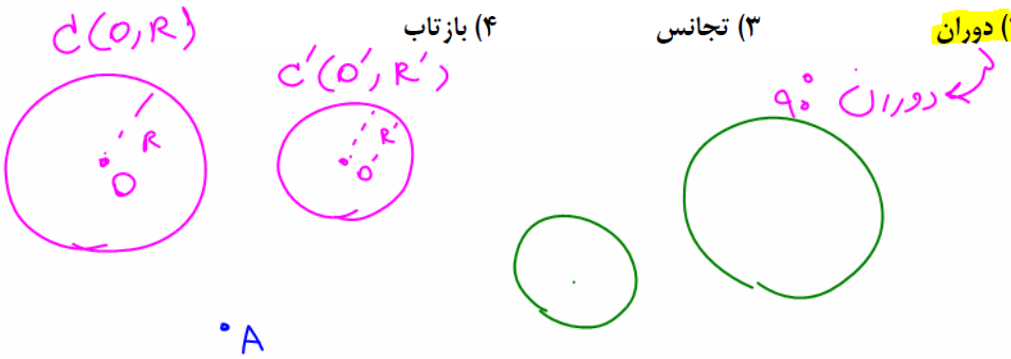
۲ یکی از نقاط تلاقی دو دایره‌ی C و C' نقطه‌ی A می‌باشد برای رسم خطی از نقطه‌ی A گذشته به‌طوری‌که در دو دایره وترهای مساوی ایجاد کند کدام تبدیل به‌کار می‌رود؟



۱) بازتاب یکی از دایره‌ها به مرکز دایره‌ی کوچک‌تر.
۲) بازتاب یکی از دایره‌ها به مرکز A.
۳) بازتاب یکی از دایره‌ها به مرکز دایره‌ی بزرگ‌تر.
۴) بازتاب یکی از دایره‌ها به مرکز وسط خط‌المرکزین دو دایره.

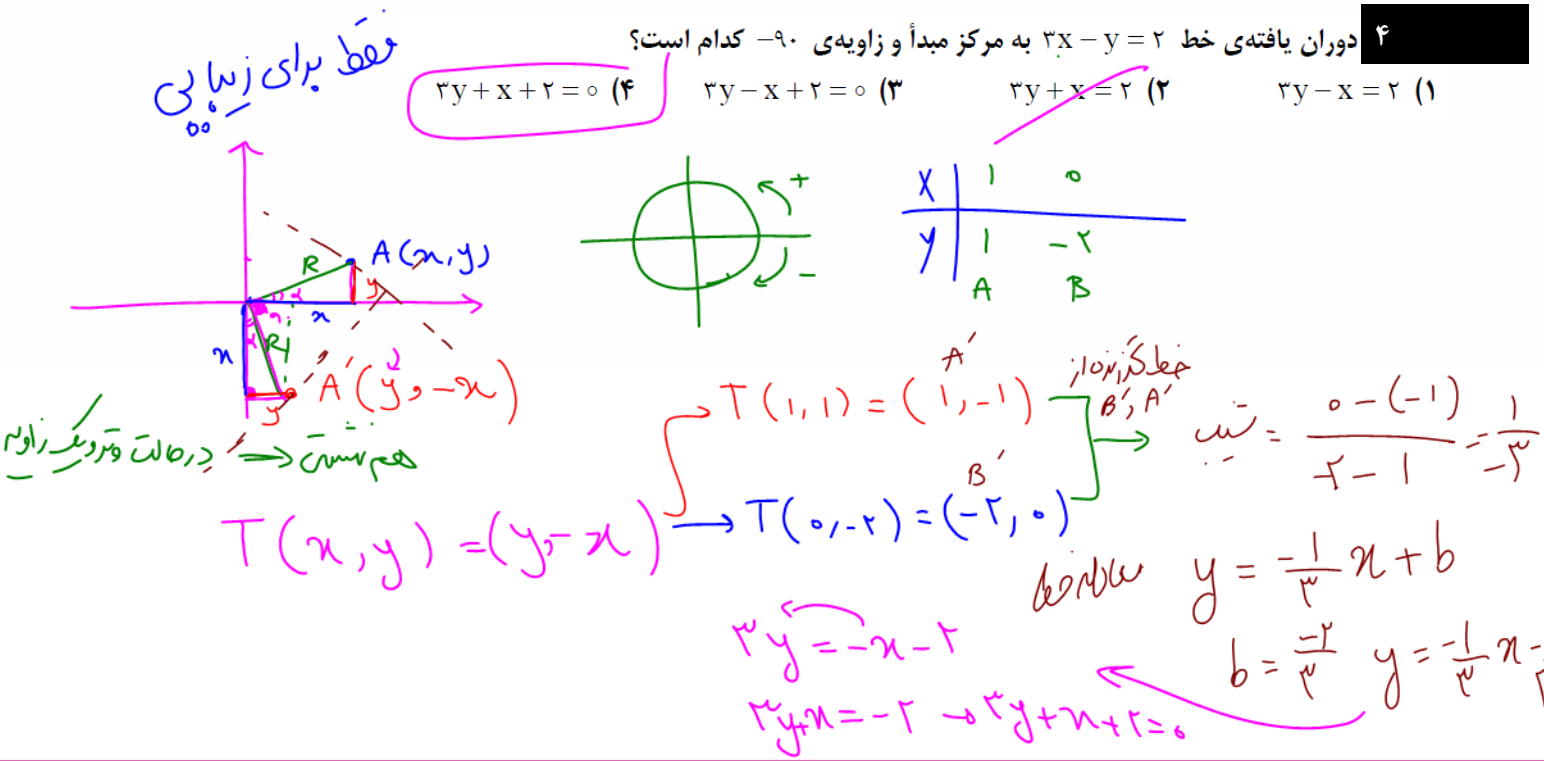
۳ دو دایره‌ی $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ و نقطه‌ی A بیرون آن‌ها مفروضند برای رسم مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین به رأس A بطوریکه دو رأس بعدی در دوایر C و C' قرار داشته باشند کدام تبدیل به‌کار می‌رود؟

۱) انتقال ۲) دوران ۳) تجانس ۴) بازتاب



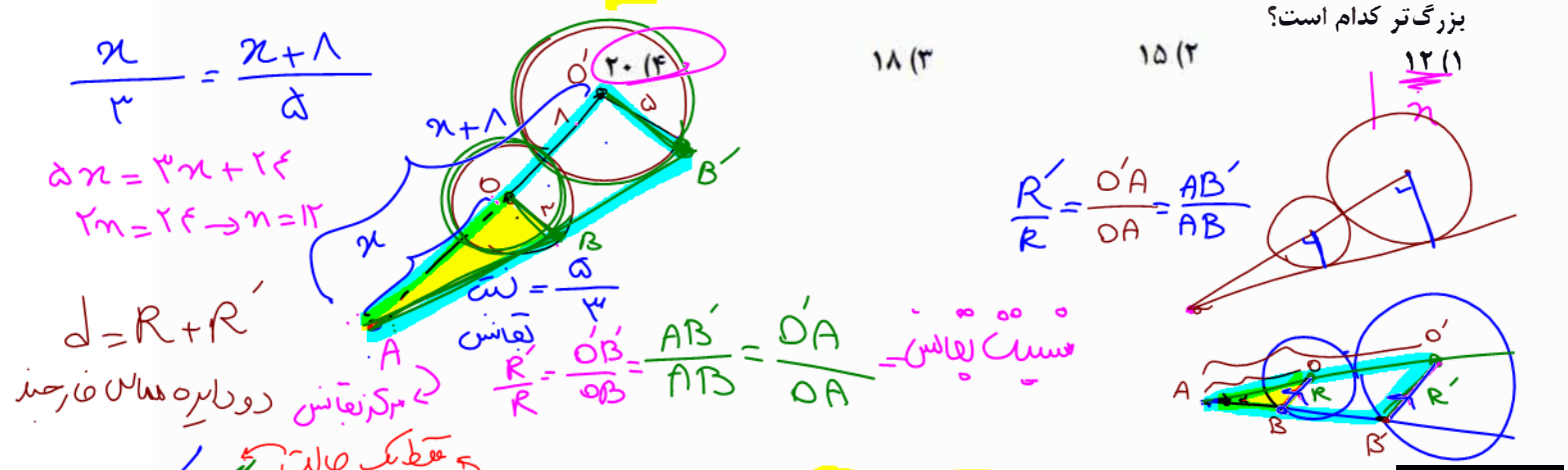
۴ دوران یافته‌ی خط $۳x - y = ۲$ به مرکز مبدأ و زاویه‌ی -۹۰ کدام است؟

۱) $۳y - x = ۲$ ۲) $۳y + x = ۲$ ۳) $۳y - x + ۲ = ۰$ ۴) $۳y + x + ۲ = ۰$



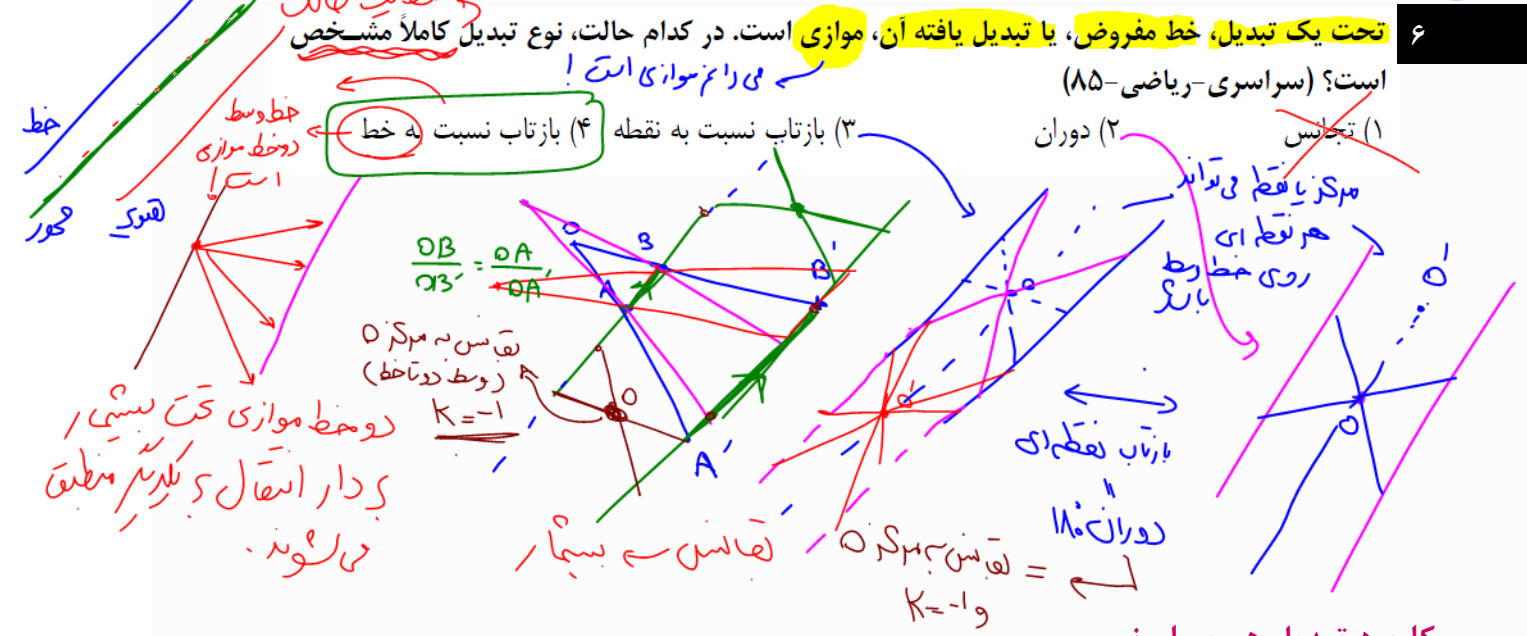
۵ در دو دایره با شعاع‌های ۳ و ۵ و خط‌المرکزین ۸، فاصله‌ی مرکز تجانس مستقیم دو دایره تا مرکز دایره‌ی بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰



۶ تحت یک تبدیل، خط مفروض، یا تبدیل یافته آن، موازی است. در کدام حالت، نوع تبدیل کاملاً مشخص است؟ (سراسری-ریاضی-۸۵)

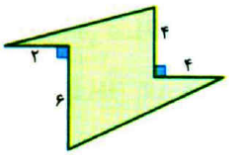
۱) تجانس ۲) دوران ۳) بازتاب نسبت به نقطه ۴) بازتاب نسبت به خط



کاربرد تبدیل هم پیرامونی

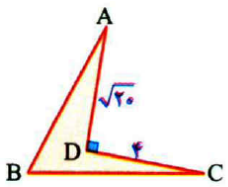
هرون

۷ زمینی به شکل زیر حصارکشی شده است و مساحت آن ۶۰ مترمربع است اگر بخواهیم بدون تغییر محیط زمین و با استفاده از تبدیل هندسی مناسب ، حصارها را طوری جابه‌جا کنیم تا مساحت زمین بیش‌ترین مقدار ممکن شود، در این صورت حداکثر مساحت زمین چند مترمربع است؟



۱) ۸۲ ۲) ۸۴ ۳) ۸۶ ۴) ۸۸

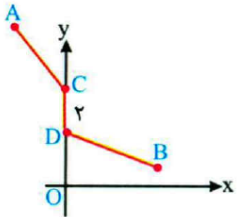
۸ مطابق شکل اگر بخواهیم بدون تغییر محیط، مساحت چهارضلعی را افزایش دهیم، مقدار افزایش مساحت چقدر است؟



۱) $۴\sqrt{۵}$ ۲) $۸\sqrt{۵}$ ۳) $۱۲\sqrt{۵}$ ۴) $۱۶\sqrt{۵}$

۹ دو نقطهٔ $A\begin{vmatrix}-۴\\۹\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}۴\\۱\end{vmatrix}$ در طرفین محور yها قرار دارند، دو نقطه C و D به فاصلهٔ دو واحد از هم روی محور yها قرار دارند، حداقل طول خط شکستهٔ ACDB کدام است؟

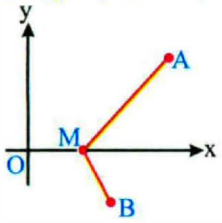
(مشابه داخل - ۹۹)



۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۸
۴) ۱۲

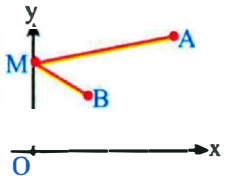
آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

۱۰ نقاط $A(۴,۶)$ و $B(۱,-۲)$ در طرفین محور xها قرار گرفته‌اند و نقطهٔ M روی محور xها می‌لغزد، حداکثر $|MA-MB|$ کدام است؟ (مشابه داخل - ۹۸)



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۱۱ نقاط $A(۵,۷)$ و $B(۱,۴)$ در یک طرف محور yها قرار گرفته‌اند و نقطهٔ M روی محور yها می‌لغزد، حداکثر $|MA-MB|$ کدام است؟ (مشابه داخل - ۹۸)



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۴

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

تبدیل ها

انتقال

ایزومتریک
نقاط ثابت:
حفظ شیب
همانی:
حفظ جهت
ویژگی:

بازتاب

ایزومتریک
نقاط ثابت:
حفظ شیب
همانی:
حفظ جهت
ویژگی:

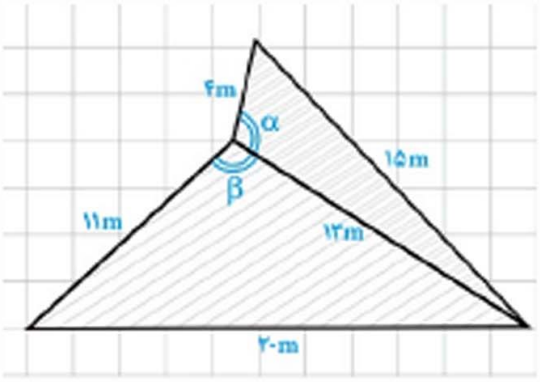
دوران

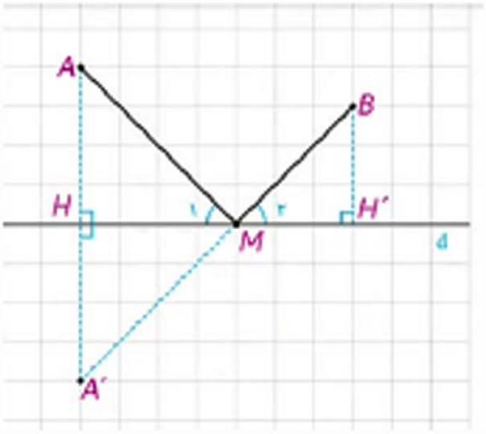
ایزومتریک
نقاط ثابت:
حفظ شیب
همانی:
حفظ جهت
ویژگی:

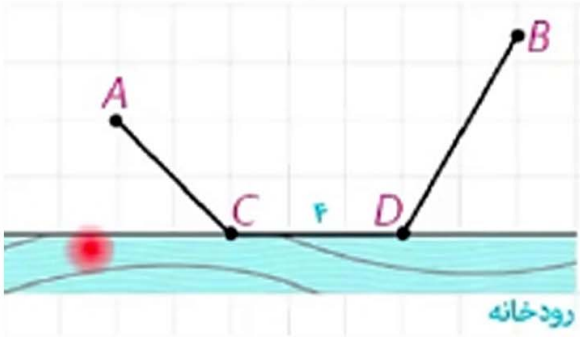
تجانس

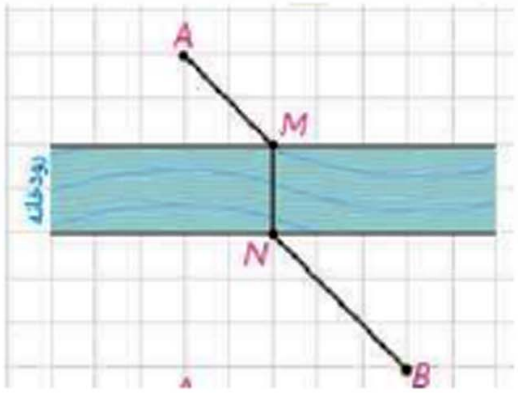
ایزومتریک
نقاط ثابت:
حفظ شیب
همانی:
حفظ جهت
ویژگی:

کاربرد تبدیل ها









ردیف	خرداد ۱۴۰۳	سؤالات (پاسخ نامه دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.	خرداد ۱۴۰۳	نمره

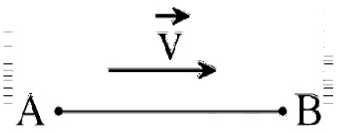
سوالات فصل ۲

۷ برای هرکدام از عبارات گروه A، تبدیل مناسب را از گروه B انتخاب کنید. (یک مورد از گروه B اضافی است.) — **۰.۷۵**

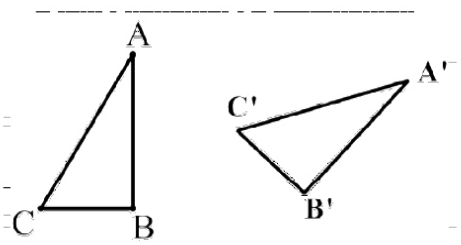
گروه A	گروه B
الف) تبدیلی که جهت شکل را حفظ نمی‌کند:	دوران
ب) تبدیلی که نتیجهٔ دو بازتاب متوالی با محورهای متقاطع است:	همانی
پ) تبدیلی که هر نقطهٔ صفحه را به خود آن نقطه نظیر می‌کند:	بازتاب
	انتقال

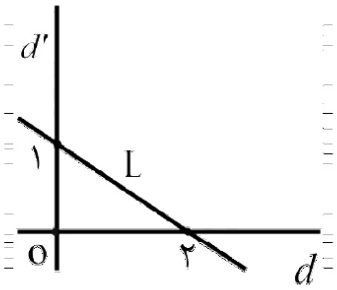
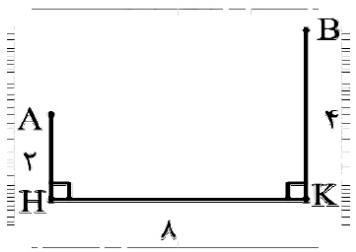
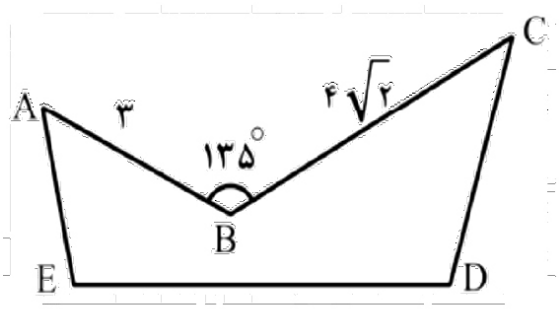
۸ با توجه به شکل زیرنشان دهید در تبدیل انتقال، اندازهٔ هر پاره‌خط و اندازهٔ تصویر آن باهم برابرند. — **۱**

($\vec{V} \parallel AB$ و اندازهٔ $\vec{V}$ از اندازهٔ پاره‌خط AB کوچک‌تر است.)



۹ نقاط A'، B' و C' به ترتیب دوران‌یافتهٔ نقاط A، B و C هستند. روش یافتن مرکز دوران را شرح دهید. — **۰.۵**



۱۰	در شکل روبه‌رو اگر خط L را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{۷}{۴}$ تصویر کنیم و آن را L' بنامیم؛ مساحت بین خط L و L' و خطوط d و d' چقدر است؟ 	۱.۵
۱۱	با توجه به شکل، نقطهٔ M روی پاره‌خط $HK=۸$ را به گونه‌ای بیابید که: الف) مسیر AMB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد. ب) کمترین مقدار عددی $AM+MB$ را محاسبه کنید. 	۱.۲۵
۱۲	در شکل زیر، می‌خواهیم بدون ان‌که محیط تغییر کند، مساحت را افزایش دهیم. میزان افزایش مساحت را حساب کنید. 	۱

دکتر رها مسیح

کارنامه خرد

روابط طولی

نمره در امتحان نهایی

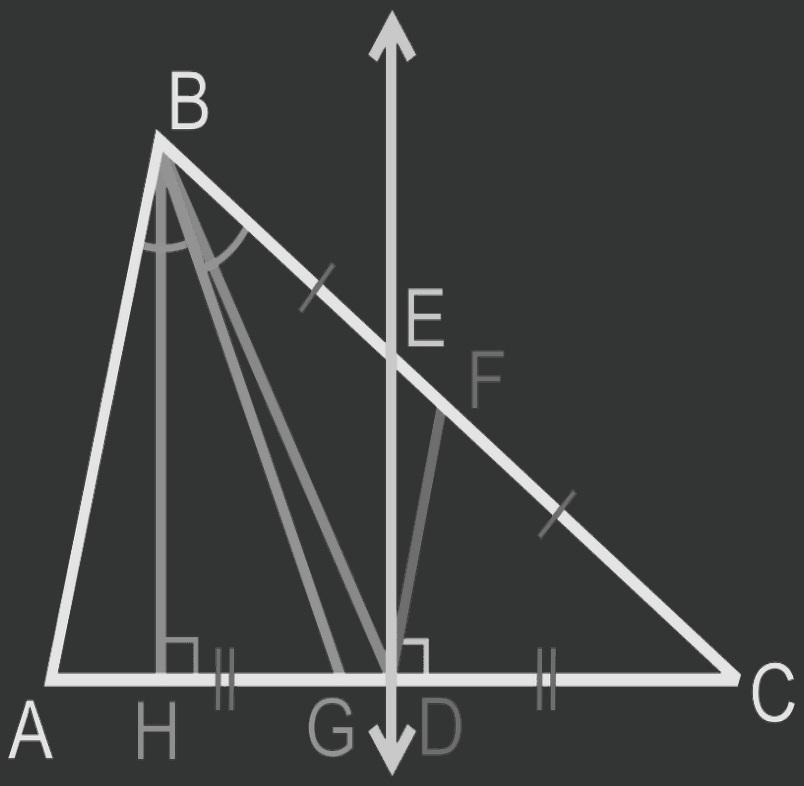
شش نمره

تعداد تست

یک تست

پیش نیاز

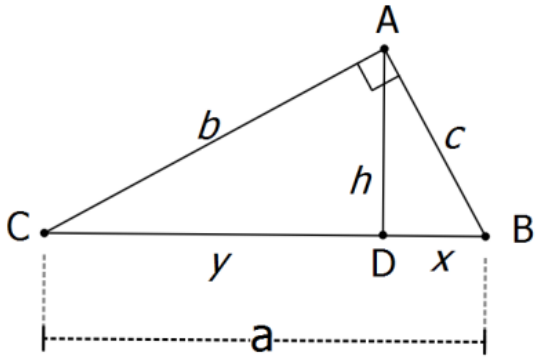
نسبت های مثلثاتی فصل ۲ ریاضی دهم
هندسه دهم فصل ۱



فصل سوم هندسه یازدهم

قضیه سینوس و کسینوس
قضیه نیمساز
قضیه هرون

مثلث قائم الزاویه



$$\frac{۱}{h_a^۲}=\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}$$

قضیه سینوس ها

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=۲R$$

قضیه کسینوس ها

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A$$

۱ در مثلث ABC، زاویه $\hat{A} = ۳۰^\circ$ و $b = a\sqrt{۲}$، زاویه C چند درجه است؟

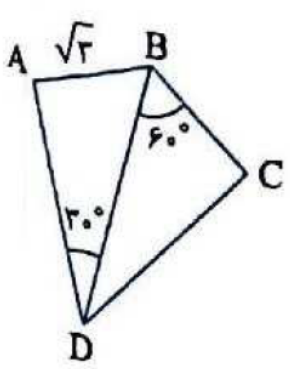
۱) ۶۰

۲) ۷۵

۳) ۱۰۵

۴) ۱۲۰

۲ در شکل روبه‌رو، چهارضلعی ABCD محاطی است. طول ضلع CD کدام است؟



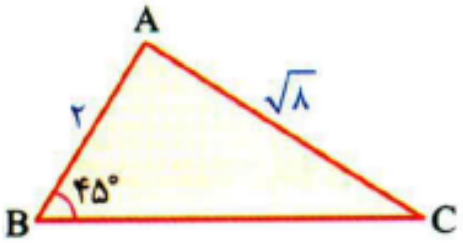
۱) $\frac{۵}{۲}$

۲) ۳

۳) $۲\sqrt{۳}$

۴) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

۳ در شکل مقابل اندازهٔ زاویهٔ A چقدر است؟



۱) ۱۳۵°

۲) ۱۰۵°

۳) ۷۵°

۴) ۶۰°

۴ در مثلثی به اضلاع ۸، ۱۵، ۱۷ اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی کدام است؟

۱) ۸/۵

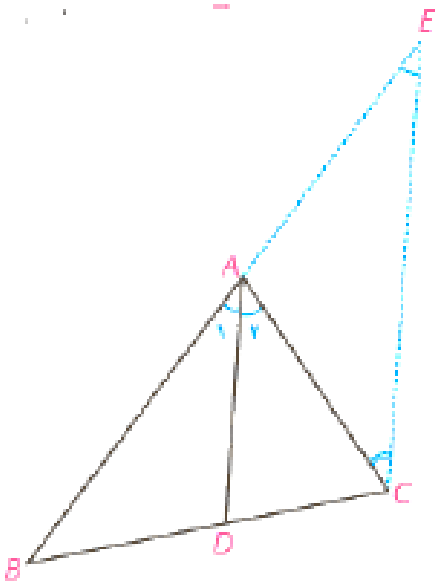
۲) ۷/۵

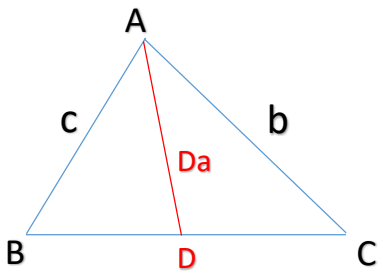
۳) ۹/۵

۴) ۹

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

قضیه نیمساز و روابط مرتبط با آن





$$da = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

رابطه های میانه

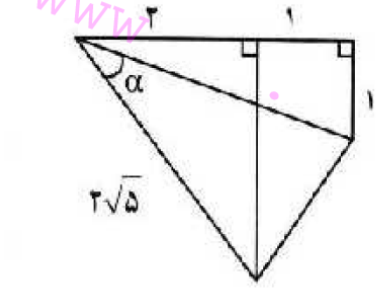
$$b^2+c^2 = \frac{a^2}{2} + 2m_a^2$$

$$m_a^2 = b^4 - \frac{a^2}{4}$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

قضیه هرون

۵ در شکل زیر، مقدار $\cos\alpha$ چقدر است؟ سراسری دی ۱۴۰۱



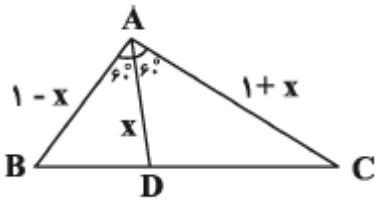
۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۱۵}$

۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۱۵}$

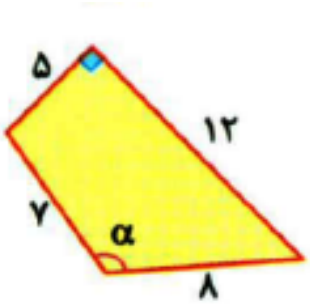
۶ در شکل مقابل، اندازه x کدام است؟



1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\sqrt{2}-1$
4. $\sqrt{3}-1$

www.sanjesh.org

۷ در چهارضلعی روبه‌رو، دو ضلع برهم عمودند. $\sin\alpha$ کدام است؟ خارج کشور ۹۸



۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۵}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\frac{۴}{۵}$

۸ در مثلث ABC، حاصل $b^2\cos^2\hat{C}+c^2\sin^2\hat{B}$ برابر با کدام است؟

۱) a^2
۲) b^2
۳) c^2
۴) bc

۹ در یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد، طول نیمساز داخلی زاویهٔ قائمه کدام است؟ سراسری ۹۵

۱) $۱/۴\sqrt{۲}$
۲) ۲/۸
۳) ۲/۱
۴) $۲/۱\sqrt{۲}$

۱۰ مساحت مثلثی با اضلاع ۷، ۹، ۱۲ کدام است؟

۱) $۱۵\sqrt{۲}$
۲) $۱۴\sqrt{۳}$
۳) $۱۲\sqrt{۵}$
۴) $۱۴\sqrt{۵}$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

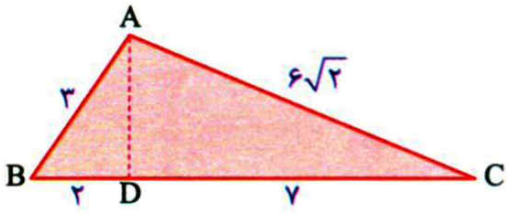
۱۱ در مثلثی با اضلاع x ، ۵ ، $۲x$ اگر مجموع مربعات میانه‌ها برابر $\frac{۱۰۵}{۲}$ باشد، محیط مثلث چقدر است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۱۲ در مثلثی با اضلاع ۷، ۱۰، ۱۳ طول میانهٔ وارد بر ضلع متوسط کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲۱}$ ۲) $۳\sqrt{۱۰}$ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۳ در شکل مقابل طول AD چقدر است؟



۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۶}$ ۴) $\sqrt{۵}$

۱۴ در مثلث ABC اگر $BC=۱۰$ و میانه‌های $BM=۱۲$ و $CN=۹$ باشد، مساحت مثلث کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۷۲ ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۰۸

۱۵ در متوازی‌الاضلاعی اندازهٔ دو قطر ۳ و ۴ و زاویهٔ بین آن‌ها ۱۵۰° است. مساحت متوازی‌الاضلاع چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

سوالات فصل ۳

خرداد ۱۴۰۳

◀ در مثلث ABC، $BC = ۱۰\,cm$، $\hat{A} = ۳۰^\circ$، مقدار شعاع دایره محیطی کدام است؟ ۰/۵ نمره

الف) ۱۰ ب) ۱۵ پ) ۲۰ ت) ۲۵

◀ در مثلث ABC که $(\hat{A} < ۹۰^\circ)$، ثابت کنید: $a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc.\cos A$ ۱/۵ نمره

◀ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون بیابید. ۱ نمره

◀ در مثلث ABC، $AB = ۷$، $AC = ۴$ و $BC = ۱۰$ است. طول نیمساز داخلی زاویهٔ C را محاسبه کنید. ۱/۵ نمره

◀ در مثلث ABC که AB=۴، AC=۶ و $BC = ۸$، نقطهٔ M وسط ضلع BC است. محیط مثلث AMC را به‌دست آورید. ۱/۵ نمره

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید